Math. P.
444

<36622204890016

<36622204890016

Bayer. Staatsbibliothek

nalytisch vorgetragen,

und

ielen aus der Erdglobuslehre beleuchtet.

Oder

ärische Trigonometrie

in

lichem Vortrag analytisch darge-
und auf die Anfangsgründe der
Astronomie angewendet.

Von

Johann Georg Prändel,

Mathematik, der Naturlehre und des Geschäfts-
em königl. Edelknabenhause, wie auch Ehren-
itglied der königl. baier. Akademie der
Wissenschaften.

---

chen, bei Ignatz Joseph Leutner,
ipzig in Comm. bei J. Fr. Gleditsch.
1815.

69

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

iese zur Astronomie unentbehrliche Wis-
hon vor mehrern Jahren bey der Her-
einer vier mathematischen Lehrbücher
Namen Kugeldreyeckslehre abge-
nd dabey Wolfs oder vielmehr Lam-
rie zum Grunde gelegt, wo alle Stücke
inklichten sphärischen Dreiecks in soge-
tlere, anliegende und abgeson-
etheilt werden. So systematisch richtig
hin diese Ansicht der Sphärik seyn mag,
h mich doch nie völlig damit ausöh-
ich beynahe allemal, wenn ich einen ge-
berechnen wollte, in Verlegenheit ge-
den vielen aufgestellten Proportionen

und

Auflösung des vorgelegten Falls die geeignetste war. Ich verhehlte diese Schwierigkeit keinem meiner Schüler, und war immer darauf bedacht, derselben so viel möglich abzuhelfen. Es gelang mir auch vollkommen. Sechs äusserst kurze Gleichungen oder algebraische Formeln erschöpfen nun die ganze Theorie der rechtwinklichten Kugeldreyecke, die sich dann auch ohne Mühe auf die schiefwinklichten anwenden lassen. Und es hat da nicht die geringste Schwierigkeit zu erkennen, welche Formel zur Auflösung dieses oder jenes vorgelegten Falls gewählt werden müße.

München, den 13. Januar 1815.

Der Verfasser.

rische Trigonometrie.

ter Abschnitt.

Vorbegriffe.

§. 1. Erklärungen.

sphärischen Dreyecke oder sogenann-
reyecke versteht man ein solches, das auf
e einer Kugel (Sphaera) von drey Bö-
Kreise derselben gebildet wird, wie Fig. 1.
ABC oder BDE ꝛc. Es stellen demnach
lbst die Seiten, und die Zusammentreffun-
gen die sphärischen Winkel des Drey-
Merkmale genug, um sie von einem geradlis
nen Dreyecke zu unterscheiden.

Kreise einer Kugel sind diejenigen, deren
ch der Kugel Mittelpunkt gehen, folglich
in zwey gleiche Theile theilen, oder deren
e mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammens
der andere ebene Kugelschnitt, der nicht durch
punkt der Kugel geht, ist ein kleinerer Kreis.

Mittagskreise, der wahre Horizont und die Ekliptik lauter grösste Kreise; hingegen die beyden Wendekreise und Polarkreise, wie auch jeder andere Kreis, der mit dem Aequator parallel läuft, kleinere Kreise.

Die Wissenschaft also, aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks, eines oder mehrere der übrigen 3 Stücke durch Rechnung zu finden, wird die sphärische Trigonometrie genennt.

§. 2. Warum man nicht auch Dreyecke in die sphärische Trigonometrie aufnimmt, die aus Bögen andrer Kreise, welche eben keine grösten sind, bestehen.

Es ist keinem Zweifel unterworfen, daß nicht auch Bögen von kleinern Kreisen der Kugel auf der Oberfläche derselben ein Dreyeck schließen helfen können, z. B. ein Bogen des Wendekreises auf der Erdkugel oder des Polarkreises, mit Bögen zweyer Meridiane: allein diesen Kreisen fehlt die Einheit des Halbmessers; es ist also nicht verstattet, die trigonometrischen Linien solcher Bögen miteinander zu vergleichen. Nur der Fall wäre hier auszunehmen, wenn die drey kleinen Kreise, die sich auf der Kugel schneiden, alle einerley Halbmesser hätten, welches in der Ausübung wohl schwerlich zutreffen dürfte. Indeß ist die Sache an und für sich möglich, daß sich Kugeldreyecke aus Bögen von verschiedenen Halbmessern berechnen lassen, wenn nur diese Halbmesser bekannt

sind:

§. 3. Lehrsatz.

größte Kreise halbiren sich immer einander,
durch die Kugel legen, wo man will.

eine Ebene von einer andern Ebene in
chschnitten wird, so bildet dieser Durch-
gerade Linie, die den beiden Ebenen gemein-
. Diese gerade Linie geht durch den ge-
hen Mittelpunkt beyder Kreisefläche, näm-
n Mittelpunkt der Kugel, folglich ist sie ein
licher Durchmesser beyder sich schneidender
urchmesser halbiren aber die Kreise, sowohl
ihrer Flächen als Peripherien, folglich hal-
zwey größte Kreise allemal, man mag sie
Kugel legen wo man will.

t also ausgemacht, daß auf der Oberfläche
l zwey Peripherien größter Kreise miteinan-
rallel laufen können, indem ihre wechselsei-
schneidung die Sache unmöglich macht.

Zurückführung der sphärischen Winkel auf ebne Winkel.

n sich demnach zwey Halbkreise in einer Ku-
men neigen, so bilden ihre Flächen eben das
Flächenwinkel, Fig. 2., dessen Scheite-
Durchmesser beyder Halbkreise ist. Dieser

Bögen, die an den beyden Endpunkten des Durchmes-
sers paarweise zusammen laufen, und die Grenzlinien
der Neigungsfläche sind, weswegen die Vereinigung
dieser Bögen auch sphärische Winkel genennt werden.
Der Neigungswinkel der Halbkreisflächen und die sphä-
rischen Winkel der Bögen sind demnach einerley. Da
sich nun ein Neigungswinkel zweyer Flächen als unend-
lich viele, dicht aneinander gereihte, ebene Winkel von
gleicher Größe betrachten läßt, so ist das Maaß eines
solchen Winkels eben darum das gemeinschaftliche Maaß
aller Winkel, die man sich aneinander gereiht denkt,
oder das Maaß des sphärischen Winkels, der mit dem
Flächenwinkel gleiche Bedeutung hat, d. i. m = AB.

§. 5. Wie sich sphärische Winkel am beßten messen lassen.

Um das Maaß solcher Winkel in Bögen größter Kreise zu erhalten, ziehe man in jeder der beyden sich zusammen neigenden Flächen einen Halbmesser, der auf der Scheitellinie lothrecht steht, so muß eben darum der Bogen zwischen diesen lothrechten Halbmessern das Maaß eines solchen Winkels seyn, und dieser Sektor gehört einem größten Kreise zu; weil sein Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel liegt.

§. 6. Eine wichtige Folgerung hieraus.

Weil jene Kreisfläche, welcher der besagte Sektor zugehört, wegen dem rechten Winkel die andern beyden

senk-

leichte Methode, das Maaß eines jeden
inkels bis zu Quadranten zu verlängern oder
ngsfalle zu verkürzen, und durch die End-
Quadranten einen größten Kreis legen, so
zwischen zu liegen kommende Bogen das
gegebnen Winkels seyn, und die Durch-
r beyden Quadranten wird allemal unter
Winkel vor sich gehen.

ine andere Vortragsart dieser Wahrheit.

beyden Endpunkte eines Kugeldurchmes-
eine die Kugel irgendwo schneidende Kreis-
t durchsticht, die beyden Pole dieses Krei-
und da diese Pole auf der Oberfläche der
ihrer Kreislinie, im Fall der Kreis ein
allerwärts 90° entfernt sind: so kann
tet werden, daß das Maaß eines jeden
Winkels der Bogen jenes Kreises sey, der
Pole im Scheitel dieses Winkels hat, und
den Bogen zu liegen kömmt.

sphärischen Neben- und Scheitelwinkeln.

die sphärischen Winkel alle auf ebne Win-
ren lassen, die jene Halbmesser bilden,

welche

die Sätze von ebnen Neben- und Scheitelwinkeln auch auf sphärische Winkel ausdehnen lassen, wenn sie in einer von beyden Eigenschaften auftretten. Es sind demnach zwey und zwey einander enrgegengesetzte Scheitelwinkel auch auf der Oberfläche der Kugel einander gleich, z. B. Fig. 3. m = s und n = u: so wie zwey Nebenwinkel, als m + n miteinander 180° halten.

§. 9. Lehrsatz, die Größe einer Dreyecksseite betreffend.

Keine Seite eines sphärischen Dreyeckes kann 180° halten, sondern muß allemal weniger betragen.

Beweis. Man denke sich zuerst nur zwey größte Kreise durch die Kugel gelegt, so werden sich ihre Peripherien nach §. 3. einander halbiren, folglich jeder dieser Halbbögen 180° halten. Nun werde ein dritter Kreis so durch die Kugel gelegt, daß er die beyden ersten anderswo als in ihren gemeinschaftlichen Halbirungspunkten schneide, um ein sphärisches Dreyeck zu erzwecken. Dadurch werden also die beyden Halbperipherien noch einmal zerstückelt, und der dritte durchgelegte Kreiß wird selbst in 4 Theile zerschnitten, wovon zwey und zwey gleich sind, und einer zum sphärischen Dreyeck gehört. Es kann also keine Seite eine halbe Peripherie seyn: oder mit andern Worten, 180° halten.

ich die drey größeen Kreise, welche, um ein
Dreyeck zu erzeugen, dnrch die Kugel gelegt
üssen, einander selbst zerschneiden; so macht
al ein pyramidenförmiges Stück ABCD
von der Kugel los, dessen kubischer Inhalt
läche des sphärischen Dreyecks im Verhältniß
eil sich bey mehrern solchen körperlichen Aus-
der nämlichen Kugel, nichts als die Fläche
ks an der Oberfläche ändert, und der Halb-
Höhe dieser Pyramidalausschnitte, die alle
en im Mittelpunkte der Kugel haben, immer
che bleibt.

Vortheile, die diese Ansicht gewähren.

cht man sich von steifem Papier solche hohle
schnitte, so lassen sich sowohl die Seiten, als
schen Winkel messen. Denn die Seiten sind
die Maaße jener Winkel, die an der Spitze
hen Kugelsektors zusammen laufen; und die
der drey Kanten stellen die sphärischen Win-
Es dürfen demnach uur in der Höhlung
Pnnkt der Kante an den beyden zusammen
Seitenflächen Perpendikel errichtet werden, so
lcher Flächenwinkel auf einen einfachen Linears
en die beyden Perpendikel miteinander bilden,
hrt.

Alle diese bisherigen Sätze können auf einer Erd- oder Himmelskugel, bis zur Evidenz verdeutlichet werden. Auch eine andere Kugel, worauf es verstattet ist, mit Bleystift oder Kreide größte Zirkel sichtbar zu machen, wird hierinfalls gute Dienste leisten. Am leichtesten lassen sich die Kugeldreyecke durch Figuren aus Pappendeckel versinnlichen. Man wird dadurch in Stand gesetzt, jedes sphärische Dreyeck als die natürliche Basis eines dreykantigen Kugelsektors zu betrachten, wo jede Kante einen Halbmesser der Kugel vorstellt.

§. 13. Folgerungen, die daraus hervorgehen.

Da die drey ebnen Winkel, welche im Mittelpunkte der Kugel zusammenlaufen, und hier die Spitze des Pyramidalsektors bilden, nie 360° zu halten im Stande sind, ohne eine vollkommene Ebne, statt eines körperlichen Winkels, hervorzubringen; so folgt hieraus, daß auch die Seiten eines sphärischen Winkels, die die Maaße dieser drey besagten Winkel vorstellen, nie miteinander 360° betragen, sondern immer weniger zählen. Sie können aber auch im entgegengesetzten Falle bis Null abnehmen, wovon man sich leicht bey sehr kleinen Kugeldreyecken überzeugt; aber nie völlig Null werden.

Will man diese Folgerungen auch auf die drey Winkel der sphärischen Dreyecke anwenden, so fällt in die Augen, daß sich zwey und zwey Flächen an den

drey

u bilden, kleiner als 180° seyn muß. Es
cht möglich, daß alle drey Winkel 3 X 180°
' erreichen. — Indessen müßen diese drey
teinander immer mehr als 180° halten; weil
)erpendikel, welche von den Flächen des drey-
)yramidalsektors auf die 3 Kanten hingefällt
ie ein ebnes Dreyeck schließen, wie dieß der
dreyeckigen Prismen ist, sondern auf eine
ig der Winkel hindeuten.

ind demnach die Schranken, welche die drey
nes sphärischen Dreyecks nie erreichen, aber
unendlich nähern können, 0° und 360°. Die
hingegen, zwischen welche die drey Winkel
hen Dreyecks hineinfallen, sind 180° und
Diese Sätze, welche in manchen Lehrbüchern
mißt werden, lassen sich in der Folge noch
ngere Beweise unterstützen.

Abtheilung der sphärischen Drey- in rechtwinklichte und schief- winklichte.

wie die geradlinichten Dreyecke in rechte, spitzwinklichte und stumpfwinkbgetheilt werden, so theilt man auch die sphäDreyecke ab. Zur ersten Klasse gehören solleinen, zwey oder drey rechte Winkel enthal-

zwey oder drey ſtumpfe Winkel angetroffen werden. Die beyden letzten Klaſſen wirft man gewöhnlich unter die Rubrik: ſchiefwinklichte Dreyecke zuſammen. Uebrigens wird auch hier jener Bogen, der in rechtwinklichten Dreyecken dem rechten Winkel gegenüber ſteht, die Hypothenuſe genennt. Jene beyden Bögen hingegen, die den rechten Winkel bilden, heißen Senkbögen, oder Vertikalbögen, oder Perpendikularbögen, oder auch oft ſchlechtweg Perpendikel.

Zweyte

Zweytet Abschnitt.

rechtwinklichten sphärischen Dreyecken.

Unter welchen Umständen, und wie e Dreyecksberechnung möglich sey.

em rechtwinkligten Kugeldreyecke sind außer dem Winkel, dessen Größe für sich selbst bekannt h 5 Stücke vorhanden, wo aus zwey derselben tte allemal durch Rechnung bestimmt werden Um das zu leisten, muß zwischen was immer Stücken von den fünfen eine trigonometrische ng statt haben.

Erschöpfung aller hieher gehörigen Gleichungen.

a fünf Stücke als sogenannte Elemente der torischen Analyse gemäß der Formel

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$ in allem 10 Ternen tionen) geben, so erschöpfen

= 5. 2 = 10 Gleichungen den ganzen Umer Theorie der rechtwinklichten Kugeldreyecke.

§. 18.

Setzt man ein für allemal die Bezeichnuog eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks nach Fig. 5. fest, so geben die 5 Elemente a, A, h, b, B, folgende 10 Ternen:

1.	a	A	h
2.	a	A	b
3.	a	A	B
4.	a	h	b
5.	a	h	B
6.	a	b	B
7.	A	h	b
8.	A	h	B
9.	A	b	B
10.	h	b	B

Von diesen 3 Stücken müßen immer 2 bekannt und 1 unbekannt seyn.

§. 18. Schärfere Bestimmung dieser 10 Rechnungsfälle.

Bey einer nähern Betrachtung dieser 10 Trinactionen ergiebt sich, daß eine Gleichung gesucht werden müße:

I. Zwischen einen Senkbogen (Perpendikularbogen), seinen Gegenwinkel, und der Hypothenuse; dieß fordern die zwey Ternen 1) a A h und 10) h b B.

II. Zwischen beyden Senkbögen, und einem schiefen Winkel. Dahin beziehen sich die beyden Complexionen 2) a A b und 6) a b B.

4) a h b.

Zwischen beyden schiefen Winkeln
m Senkbogen. Dahin deuten die beyden
) a A B und 9) A b B.

Zwischen einem Senkbogen, seinem
egen über stehenden Winkel, und der
enuse. Wer sieht nicht, daß dieser doppelt
Fall in den beyden Trinationen 5) a h B
A h b enthalten sey?

Endlich zwischen beyden schiefen Win-
der Hypothenuse, welcher Fall sich in
o A h B ausspricht.

§. 19. Erster Lehrsatz.

jedem rechtwinklichten sphärischen
e ist der Sinus eines Vertikalbo-
Perpendikels) gleich dem Produkte aus
nus des Gegenwinkels in den Sinus
pothenuse.

Sätze. Fig. 6.

1. sin. a = sin. A sin. b

2. sin. b = sin. B sin. h.

Beweis des ersten Satzes.

ziehe in dem hohlen Pyramidalsektor der Ku-
em Winkel B den Sinus vom Senkbogen a

und

de sie durch die Hilfslinie m n, so entsteht das ebne Dreyeck B m n; wo m ein rechter Winkel ist, und der Flächenneigungswinkel n den schiefen Winkel A vorstellt. Es ist daher

$$Bn : Bm = \sin. m : \sin. n.$$

Subst. $\sin. h : \sin. a = 1 : \sin. A$

und $\sin. a = \sin. A \sin. h.$

Beweis des zweyten Satzes.

Man ziehe in dem nämlichen Kugelsektor Fig. 7. aus dem sphärischen Winkel A den Sinus von dem Senkbogen b und von der Hypothenuse, so wird eine ähnliche Verbindungslinie m n das ebne Dreyeck m n B hervorbringen, wo die Proportion statt hat:

$$An : Am = \sin. m : \sin. n.$$

Subst. $\sin. h : \sin. b = 1 : \sin. B.$

und $\sin. b = \sin. h \sin. B.$

§. 20. Folgesätze.

1. Wenn die Hypothenuse 90° hält, das heißt, wenn sie ein Quadrant ist, dann zählt der Senkbogen eben so viel Grade als sein Gegenwinkel, oder was auf das Nämliche hinausläuft, der Senkbogen ist das Maaß von seinem Gegenwinkel; denn für $h = 90^\circ$ ist $\sin. a = \sin. A$ und $\sin. b = \sin. B.$

2. Weder die Hypothenuse noch ein anderer Bogen oder Winkel kann zu 180° anwachsen; weil bey diesem Ereignisse eine der beyden Gleichungen zu Null werden würde, denn $\sin. 180^\circ = 0.$

$\sin. h = \frac{\sin. a}{\sin. A}$

$\sin. h = \frac{\sin. b}{\sin. B}$, und es geht aus der

stellung dieser beyden Werthe eine neue Glei-
vor, nämlich:

$\frac{\sin. a}{\sin. A} = \frac{\sin. b}{\sin. B}$, oder proportionsmäs
drückt:

sin. a : sin. A = sin. b : sin. B;

die Sinusse der Vertikalbögen verhalten sich
Sinusse ihrer Gegenwinkel.

Wenn demnach von den drey Stücken eines
rechtwinklichten Dreyecks: Hypothenuse, ein
gen und dessen Gegenwinkel, zwey Stücke be-
, so läßt sich das dritte leicht durch Rech-
mmen; denn es übrigt nur noch, daß auch
nd sin. B allein zu stehen kommen, und die-
g kommt in folgenden 2 abgeleiteten Formeln
vor:

$A = \frac{\sin. a}{\sin. h}$ und $\sin. B = \frac{\sin. b}{\sin. h}$,

Anwendung auf die Erdes- oder Himmelskugel.

sey Fig. 8. mn ein Bogen des nördli-
endekreises, MN ein Bogen des Ae-
, und mA der vierte Theil der Ekliptik,

so

ig etwas mehr als 23 28 beträgt. Der Punkt B bedeutet den veränderlichen Ort der Sonne in der Ekliptik; daher h die Sonnenlänge genannt wird, a heißt die Abweichung der Sonne (declinatio Solis) und b die gerade Aufsteigung.

Gesetzt, es sey für einen Tag z. B. für den 11. May die Sonnenlänge 50° 16: man möchte nun in Erfahrung bringen, wie weit sich die Sonne an diesem Tage schon vom Aequator entfernt habe, das ist mit andern Worten, wie groß die Deklination der Sonne sey, so gilt die Folgerung: Es ist in einem rechtwinklichten Dreyeck auf der Erd- oder Himmelskugel gegeben die Hypothenuse und ein schiefer Winkel; man soll den gegenüberstehenden Vertikalbogen bestimmen. Dieß leistet ohne weiters die Gleichung:

sin. a = sin. h. sin. A.

oder sin. x = sin. 50° 16 sin. 23° 28'

Log. sin. 50° 16' = 0. 8859420 — 1
Log. sin. 23° 28' = 0. 6001181 — 1

0. 4860601 — 1 =
Log. sin. 17° 50'

Es hat sich also die Sonne am 11. May um einen Vertikalbogen von 17° 50' vom Aequator hinweg gegen den Wendekreis des Krebses entfernt. Allgemein wäre demnach sin. decl. ☉ = sin. long. ☉ X sin. oblig.

* Man

ebet schon verflossen sind, oder noch zu erhalten
rühling und Sommer mit 57; im Herbst und Win-
62 Minuten multiplizirt, und das Produkt durch
mit 60 zu Graden gemacht werden. Weil diese
ren die Geschwindigkeit der Sonne in den obern
5 himmlischen Zeichen der Ekliptik ausdrücken.

Zur Selbstübung.

ß ist wohl die Abweichung der Sonne am 29. Au-
diesem Tage bis zur nächsten Nachtgleiche noch
ge hin sind? Wie groß ist die Abweichung der
sten Dezember?

§. 22. Zweyter Lehrsatz.

Tangente eines Vertikalbogens ist
m Produkte aus der Tangente des
nkels in den Sinus des andern
bogens.

Sätze.

1. tang. a = tang. A siu. b
2. tang. b = tang. B sin. a

Beweis des ersten Satzes.

t in dem Dreyecke Bmn Fig. 6.

Bm : mn = sin. n : cos. n

$$Bm : mn = \frac{\text{sin. n}}{\text{cos. n}} : 1$$

Bm : mn = tang. n : 1

Bm = mn. tang. n.

$$Bm : mk = \sin. o : \cos. o$$

$$Bm : mk = \frac{\sin. o}{\cos. o} : 1 \quad : \cos. o$$

oder $Bm : mk = \text{tang. } o : 1$

und $Bm = mk. \text{ tang. } o.$

Nun war vorher $Bm = mn. \text{ tang. } n.$

Daher $mk. \text{ tang. } o = mn. \text{ tang. } n.$

Nun ist in dem $\triangle$ mknmn : $mk = \sin. \varphi : 1$

und $mn = mk \sin. \varphi$

Dieß oben subst. giebt

$$mk. \text{ tang. } o = mk. \text{ tang. } n \sin. \varphi$$

$$: mk \quad \text{tang. } o = \text{tang. } n \sin. \varphi$$

u. in d. Figur $\text{tang. } a = \text{tang. } A. \sin. b.$

Beweis des zweyten Satzes.

Man ziehe die Sinusse aus A statt aus B, so ist der Beweis genau der vorige.

§. 23. Folgesätze.

1. Wenn also von den 3 Stücken: 2 Vertikalbögen und ein schiefer Winkel in einem rechtwinklichten, sphärischen Dreyecke 2 Stücke bekannt sind, so läßt sich das dritte Stück allemal durch Rechnung bestimmen. Denn es ist nichts leichters, als die hiezu gehörigen Formeln aus den beyden erwiesenen Gleichungen abzuleiten:

1) $\text{tang. } A = \frac{\text{tang. } a}{\sin. b}$

2)

3) $\sin. a = \frac{\text{tang. } b}{\text{tang. } B}$

4) $\sin. b = \frac{\text{tang. } a}{\text{tang. } A}$

lus den beyden ersten abgeleiteten Formeln kennbar hervor, daß, wenn man a odrr b ezt, A = a werden müße; denn sin. 90° tang. A = tang. a, und weil gleiche gleichen Winkeln oder Bögen zugehören, und auf gleiche Weise B = b. Dieß Erkt sich in Worten so aus: „Ist einer von Vertikalbögen ein Quadrant, so ist der anfalbogen das Maaß von seinem Gegenwinraus folgt, „daß dieser Gegenwinkel seinen n Pol jenes Kreises habe, wovon der gende Vertikalbogen ein Theil ist."

ie 3te und 4te abgeleitete Formel geben zu aß wenn ein Vertikalbogen und sein Gegenhe Größe habe, der Gegenwinkel des andern ens nothwendig ein rechter Winkel seyn mü ist z. B. a = A, so hat man

$\sin. b = \frac{\text{tang. } a}{\text{tang. } a} = 1$

$\text{n. } 90° = 1$

$\text{n. } b = \sin. 90°$

$b = 90°$

emnach alle Bögen oder vielmehr Quadran-

recht auf diesem Kreise.

§. 24. Anwendung auf die Erd- und Himmelskugel.

Es soll für den 11. May aus der Deklinazion der Sonne a, die oben $17^\circ 50'$ befunden worden, und aus der Schiefe der Ekliptik A die gerade Aufsteigung b berechnet werden.

Auflösung.

Hieher gehört die 4te abgeleitete Formel:

$$\sin. b = \frac{\text{tang. a}}{\text{tang. A}} \text{ d. i. } \sin. x = \frac{\text{tang. } 17^\circ 50'}{\text{tang. } 23^\circ 28'}$$

Log. tang. $17^\circ 50' = 0.5074602 - 1$
Log. tang. $23^\circ 28' = 0.6076106 - 1$

$- \quad +$

$0.8698496 - 1 =$ Log. sin. $47^\circ 49'$

Die gerade Aufsteigung beträgt demnach $47^\circ 49'$ für den gegebenen Tag.

Zur Selbstübung.

Wie groß ist die gerade Aufsteigung der Sonne am 29. August und am 1. Dezember?

§. 25. Noch eine Anwendung auf die Anfangsgründe der Astronomie.

Für jeden gegebenen Tag und Ort die Länge des Tags oder der Nacht zu finden.

Auf-

und den Ort der Sonne für den gegebenen
ir wollen annehmen, er falle im Frühling
ier — in der Ekliptik gesucht hat: so führe
Ort der Sonne bis zu dem Mitternachts-
gegengesetzte Hälfte des Mittagkreises) und
den Punkt des Aequators, der zugleich mit
durch den Mitternachtskreis geht. Es wird
al der Punkt seyn, der die gerade Aufstei-
inzt; denn um diesen Punkt zu bestimmen,
Ort der Sonne ein Vertikalbogen auf den
inabgefällt werden, und dieser Vertikalbogen
ein Stück jenes Meridians, der durch den
Sonne geht; weil jeder Meridian den Aequa-
t durchschneidet. Nun führe man den Ort
bis zum Horizont, und gebe Acht, wie
deß vom Aequator durch den Mitternachtbo-
ch schiebt. Dieses Aequatorstück muß nun
nd in Stunden ausgedrückt werden, so hat
halbe Nachtlänge gefunden. Auf eine ähnli-
ndet man im Herbste und Winter die halbe
e.

Fig. o ist das deutlich vorgestellt. AB sey
nt, CD der Aequator, EF die Ekliptik und
Meridian, der durch den Ort der Sonne
folglich das Stück bf dieses Meridians die
n der Sonne; cd ist endlich jener Parallel-
die Sonne am gegebenen Tag beschreibt.

So-

Mitternachtskreis PFQ hindurch geschoben. Es bildet demnach abf ein rechtwinklichtes Kugeldreyeck, wo der Winkel bey a das Komplement der Polhöhe, nämlich BD zum Maaße hat, und bf die Deklinazion der Sonne vorstellt. Der Bogen af ist die Ergänzung des halben Nachtbogens fD zu 90°. Dieses af nun muß als ein Vertikalbogen aus dem andern Vertikalbogen bf und aus dem Gegenwinkel des letztern bey a berechnet werden. Es ist demnach die Tangente des Vertikalbogens bf gleich der Tangente des Gegenwinkels bey a multiplizirt mit dem Sinus des andern Vertikalbogen af. Das hieße:

tang. bf = tang. a. sin. af, und sin. af allein gestellt $\sin. af = \frac{\text{tang. bf}}{\text{tang. a}}$

Nun kann für tang. a auch tang. BD oder cotang. BP, und für sin. af = cos. fD gesetzt werden also

$$\cos. fD = \frac{\text{tang. bf}}{\text{cotang. BP}}$$

Drückt man nun den halben Nachtbogen allgemein durch $\frac{1}{2}n$, die Deklination der Sonne bf durch d und die Polhöhe durch p aus, so erhält man die Formel: $\cos. \frac{1}{2}n = \frac{\text{tang. d}}{\text{cotang. p}}$ für welche auch geschrieben werden kann:

cos. $\frac{1}{2}n$ = tang. d tang. p; weil immer

$$\frac{1}{\text{cotang. } \varphi} = \text{tang. } \varphi$$

ist, folglich eines für das andere substituirt werden darf.

Ein

Die Polhöhe von München ist 48° 8′ und
zion der Sonne beträgt laut obiger Berech-
50′. Also

17° 50′ = 0. 4860749 — 1
48° 8′ = 0. 0475955

0. 5336704 — 1 = Log.
cos. 70° 2′

lso der halbe Nachtbogen den 11. May für
70° 2′ Nun folgere man nach der Regel
60° geben 24 Stund, oder 15° geben 1
s geben 70°? Die Antwort ist 4 Stund
n, die Zeit des Sonnenaufgangs.

Zur Selbstübung.

leng die Sonne den 11. Juni in Troja unter,
adt 1148 Jahre vor Christi Geburt durch die List
in der Nacht genommeu worden? Troja lag aber
Atlas der alten Welt unter dem 40. Grad nörd-
e.

6. Wendung dieser Aufgabe.

äßt sich auch aus der halben Nachtdauer,
das Nämliche bedeutet, aus der Stunde des
der Sonne und aus der Deklinazion allemal
e oder die Breite des Orts finden; denn ei-
Versetzung verwandelt obige Formel cos. $\frac{1}{2}$ n
d. tang. p in diese um:

$$\text{tang. } p = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2} n}{\text{tang. } d}.$$

Dadurch wird
man

der Erde befindet.

Zum Beyspiel. „Ein Englisches Schiff, das auf der nördlichen Halbkugel den 20. April die Nacht vor Anker gelegen war, fand dieselbe Nacht 8 Stunden 50 Minuten lang. Es bemerkte zugleich daß die Sonne um 10 Stunden 40 Minuten früher als in London aufgieng. Auf welchem Punkt der Erde hatte das Schiff geankert?“

Auflösung.

1. Vor allem muß die Sonnenlänge für den 20. Aprll bestimmt werden. Es sind von der nächsten Nachtgleiche $10 + 20 = 30$ Tage verstrichen. Nun ist es, wie schon oben bemerkt worden, eine astronomische Thatsache, daß die Sonne im Frühling und Sommer, daß ist in den obern 6 himmlischen Zeichen, täglich 57: hingegen im Herbst und Winter täglich 61 Minuten in der Ekliptik vorrückt. Daher spreche man nach der Regel Detri: 1 Tag giebt 57′, was geben 30 Tage? Antw. 28° 30′.

2. Bestimmung der Deklination der Sonne für diesen Tag nach der Formel sin. d = sin. l. sin. s

Log. sin. 28° 30′ = 0. 6786629 — 1
Log. sin. 23° 28′ = 0. 6001181 — 1

0. 2787810 — 1 = Log. sin. 10° 53′.

3. Ver-

2

ogen nach der Regel Detri: 24 Stund. ge=
was geben 24 St. 25 M.? A. 64° 15'.

Berechnung der Polhöhe oder Breite des Orts,
chiff vor Anker liegt, nach der so eben ab=

Formel tang. $p = \frac{\cos. \frac{1}{2} n}{\text{tang. } d}$

64° 15' = 0. 6379351 — 1
16° 55' = 0. 2842617 — 1
— +
9. 3536734 = Log. tang. 66° 2'

ff befindet sich demnach in der nördlichen
66° 2'.

tun muß auch noch die geographische Länge
es ausgemittelt werden, und diese ergiebt sich
nterschiede der Zeit des Sonnenaufgangs auf
e und in London. Denn man spreche nach
Detri: 24 Stund. geben 360°, was 10
=? Man erhält zur Antwort: 160°, um
Schiff weiter gegen Ost liegt. Nun zählt
selbst schon 17° 34' Länge, also das Schiff
und der Punkt, wo das Schiff vor Anker
dadurch völlig auf der Erdbodenfläche bestimt.
et sich in der Nähe von Kamtschaka.

Zur Selbstübung.

nson schätzte den 16 May die Nachtlänge auf sei=
auf 5 Stund. 45 Minuten; welche geographische
wohl sein Zufluchtsort gehabt haben?

Der Kosinus der Hypothenuse ist gleich dem Produkte aus den beiden Senkbögen.

Satz.

cos. h = cos. a. cos. b.

Beweis.

Man verlängere Fig. 10. den Senkbogen a zum Quadranten bis C, desgleichen die Hypothenuse h bis D. Nun lege man durch die Punkte C und D einen größten Kreis, so wird B der Pol dieses Kreises seyn. Verlängert man den Senkbogen b so lange, bis er besagten größten Kreis in E schneidet, so wird E der Pol des Bogens BC seyn; weil seine Schenkel auf ihm bey H und C rechte Winkel machen. Weil nun HE ein Quadrant ist, so muß d das Komplement von b seyn, und HC ist eben darum das Maaß vom Winkel E. Es ist demnach zufolge des allerersten Lehrsatzes in dem Dreyecke AED.

sin. e = sin. E. sin d, und gehörig substituirt giebt: **cos. h = cos. a cos. b.**

§. 28. Folgesätze, die daraus hervorgehen.

1. Aus zwei Vertikalbögen läßt sich die Hypothenuse, und wechselsweise aus der Hypothenuse und einem Vertikalbogen der andere Vertikalbogen bestimmen. Das erste leistet die erwiesene Gleichung selbst, und die beiden andern Forderungen lösen die zwei Ableitungen auf:

$\cos. b. = \frac{\cos. h}{\cos. a}$

einer von den zwei Vertikalbögen ein Qua=
muß auch die Hypothenuse ein Quadrant
gesetzt, es sey $a = 90°$, so ist

$\cos. h = \cos. 90. \cos. b$

$\cos. 90° = 0$

$\cos. h = 0. \cos. b = 0.$

$\cos. 90° = 0.$

$\cos. h = \cos. 90°$ und eben darum auch

$h = 90°.$

ämliche Antwort kömmt auch zum Vorschein,
beyde Vertikalbögen zu Quadranten wer=

nd wechselsweise, ist die Hypothenuse ein
so muß auch einrr von den beiden Verti=
Quadrant seyn; denn $\cos. a = \frac{\cos. 90°}{\cos. b.}$
$= 0$; also $a = 90°$. Das Nämliche er=
h auch in $\cos. b = \frac{\cos. h}{\cos. B.}$

ält ein Vertikalbogen mehr als 90°, so
die Hypothenuse mehr als 90° halten.
fe Winkel oder die Bögen stumpfer Win=
verneinte Kosinusse. Ist nun in dem Aus=
$. h = \cos. a. \cos. b$ entweder cos. a=

oder

eben darum $h > 90°$.

5. Anders verhält sich die Sache, wenn beyde Vertikalbögen größer als Quadranten sind; weil zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben. In einem solchen Falle muß also die Hypothenuse immer kleiner als ein Quadrant seyn.

6. Ist die Hypothenuse größer als ein Quadrant, so muß auch einer von den zwei Vertikalbögen größer als ein Quadrant seyn, welches aus den 2 abgeleiteten Formeln nachgewiesen werden kann.

§. 29. Anwendung auf die Erd- und Himmelskugel.

Aus der Deklinazion der Sonne a für einen bestimmten Tag, z. B. für den 11. May, wo sie zu $17° 50'$ berechnet worden, und aus der Sonnenlänge $h = 50° 16'$ die gerade Aufsteigung zu bestimmen.

Auflösung.

Hieher gehört die Formel $\cos. b = \frac{\cos. h}{\cos. a}$

Das ist: $\cos. x = \frac{\cos. 50° 16'}{\cos. 17° 50'}$

Log. cos. $50° 16' = 0.8056472 - 1$

Log. cos. $17° 50' = 0.9786148 - 1$

$+ \quad -$

$0.8270324 =$ Log. cos. $47° 49'$

Die

Zur Selbstübung.

hre die nämliche Rechnung auch für den 19. Au-
den 1. November.

§. 30. Vierter Lehrsatz.

Kosinus eines schiefen Winkels ist
m Produkte aus dem Kosinus der
ite in den Sinns des andern schie-
kels.

Sätze.

. cos. A = cos. a. sin B,
. cos. B = cos. b. sin A.

Beweiß des 2ten Satzes.

t gemäß dem allerersten Lehrsatze:

sin a = sin A. sin h.

Fig. 9 auf das Dreieck angewandt, giebt:

sin α = sin A. sin d.
sin. α = cos. B, und sin. d. = cos. b
subst. cos. B = sin. A cos. b oder
cos. b sin. A.

Beweis des ersten Lehrsatzes.

ergänze die drei Seiten nach verkehrter Rich-
Quadranten, wie Fig. 11, so daß die Ver-
bei B statt bei A entstehen, und wende

den

man seinen Zweck gewiß nicht verfehlen.

§. 31. Einige Folgesätze.

1. Wenn in einem rechtwinklichten sphärischen Dreiecke die zwei schiefen Winkel bekannt sind, so läßt sich jeder der Vertikalbögen bestimmen. Ist aber ein Vertikalbogen und ein schiefer Winkel bekannt, so kann der andere Vertikalbogen berechnet werden.

2. Ableiten lassen sich folgende 2 Gleichungen:

1. $\cos. a = \frac{\cos. A}{\sin. B}$ oder $\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. A}$

2. $\sin. A = \frac{\cos. B}{\cos. b}$ oder $\sin. B = \frac{\cos. A}{\cos. a.}$

3. Hat das sphärische Dreieck 2 rechte Winkel, so ist das Maaß des dritten Winkels seine Gegenseite selbst, wie schon einmal erwiesen worden; denn, wenn in $= \cos. a = \frac{\cos. A}{\sin. B}$ statt $\sin. B = \sin. 90^{\circ} =$ 1 gesetzt werden darf, dann erscheint ohne weiters $\cos. a = \cos. A$, folglich $a = A$ u. s. w.

§. 32. Anwendung auf die Erd- und Himmelskugel.

Es soll aus der Schiefe der Ekliptik und aus der geraden Aufsteigung der Sonne jener schiefe Winkel gefunden werden, den die Deklinazion der Sonne mit dem Mittagskreise macht.

de Aufsteigung der Sonne laut Rechnung
eträgt. Man kennt also hier einen schie-
und einem ihm nicht gegenüber stehenden
n; daher eine der beiden Formeln des
Anwendung kömmt. So ist z. B. für die
el cos. A = cos. a sin. B das a =
nd das B = 23° 28′ Daher

cos. 47° 49′ = 0. 8270403 — 1
sin. 23° 28′ = 0. 6001181 — 1

0. 4271674 — 1 =
Log. cos. 74° 30′

Zur Selbstübung.

liche Winkel soll auch für den 20. August und
ezember ausgemittelt werden.

§. 33. Fünfter Lehrsatz.

Kotangente der Hypothenuse ist
n Produkte aus der Kotangente
tikalbogens in den Kosinus jenes
inkels, der dem obigen Vertikal-
t gegenüber steht.

Satz.

cot. h = cot. a cos. B.
cot. h = cot. b cos. A.

tang a = tang B sin. b.

Wendet man diese Gleichung auf das Dreieck AE D Fig. 9 an, so ist dies

tang e = tang E sin. α

und subst. cot. h = cot. a sin. B.

Werden die Ergänzungen in verkehrter Richtung vorgenommen, wie in Fig. 10, so daß es bei B statt bei A Vertikalwinkel absetzt, dann ergiebt sich auch der Beweis für den zweiten Satz.

§. 34. Anderer Vortrag dieses Lehrsatzes.

Der so eben erwiesene Lehrsatz spricht sich auch eben so gut, wenn man will, in folgender Form aus: Die Tangente eines Vertikalbogens ist gleich dem Produkt aus der Tangente der Hypothenuse in den Kosinus jenes schiefen Winkels, der dem besagten Vertikalbogen nicht gegenübtr liegt.

Satz.

tang. a = tang. h. cos. B.

oder tang. b = tang. h. cos. A.

Beweis.

Denn da cot. h = cot. a. cos. B ist, und da sich die Kotangenten zweier Bögen oder Winkel verkehrt wie ihre Tangenten verhalten, folglich:

cot.

$$\frac{}{\text{tang. h}}$$

beiden Werthe von cot. h eine neue Glei-
nlich:

$$\frac{\text{cot. a, tang. a}}{\text{tang. h.}} = \text{cot. a. cos. B.}$$

$$\frac{\text{tang. a}}{\text{tang. h}} = \text{cos. B.}$$

h tang. a = tang. h. cos. B.

öllig gleiche Weise wird auch dargethan,
b = tang. h. cos. A sey.

35. Ein Paar Folgesätze.

nut man in einem rechtwinklichten sphäri-
cke die Hypothenuse und einen schiefen Win-
t sich jener Vertikalbogen daraus berechnen,
egebenen schiefen Winkel nicht gegenüber

neben der Hypothenuse ein Vertikalbogen
ann läßt sich jener schiefe Winkel ausfin-
, der dem Vertikalbogen nicht gegenüber-
n eine kleine Wendung der zweiten Haupt-
ht hervorgehen:

$$\frac{\text{tang. b}}{\text{tang. h}}, \text{ und cos. B} = \frac{\text{tang. a}}{\text{tang. h}},$$

ch übrigt ein dritter Fall. Es kann näm-
us einem schiefen Winkel und seinem nicht

pothenuſe verlangt werden. Dieſer Fall erfordert fol
gende Modifizierungen der Formel.

$$\text{tang. h} = \frac{\text{tang. a}}{\text{cos. B}} \text{ oder } \text{tang. B} = \frac{\text{tang. b}}{\text{cos. A}}$$

§. 36. Anwendung auf die Erd- und Him melskugel.

Vorhin iſt aus der geraden Aufſteigung der Son
ne und aus der Schiefe der Ekliptik jener Winkel be
rechnet worden, den die Deklinazion mit der Eklipti
macht; wir wollen nun hier die gerade Aufſteigung
weglaſſen, und die Deklinazion dafür geben, um zu
ſehen, ob der Winkel die nämliche Größe erhält.
Die Deklinazion der Sonne iſt für den 11ten Mai lau
Rechnung 17° 50′, und die Sonnenlänge 50° 16′.

Auflöſung.

Hieher paßt gemäß Fig. 8 die Formel cos. B =
$\frac{\text{tang. a}}{\text{tang. h}}$, das iſt $\text{cos. x} = \frac{\text{tang. } 17^\circ\ 50'}{\text{tang. } 50^\circ\ 16'}$

Log. tang. 17° 50′ = 0. 5074602 — 1
Log. tang. 50° 16′ = 0. 0802949

0. 4271653 — 1 =
Log. cos. 74° 3

wie oben.

für den 11. Dezember.

§. 37. Sechster Lehrsatz.

Kotangente eines schiefen Win-
gleich dem Produkte aus der Tan-
s andern schiefen Winkels in den
der Hypothenuse.

Sätze.

. cot. A = tang. B. cos. h

. cot. B = tang. A. cos. h.

Beweis.

äß dem zweiten Lehrsatze ist Fig. 10

ang. a = tang. A sin. b.

auf das Dreieck der Ergänzungsbögen an-
giebt

ang. α = tang. A. sin. e

tang. B = tang. A. cos. h, welches der
z ist.

bieht die Anwendung auf die Ergänzungen
hrter Richtung, wie Fig. 11, so kömmt der
zum Vorschein.

§. 38. Folgesätze hieraus.

lus der Hypothenuse und aus einem schiefen
ßt sich in einem rechtwinklichten sphärischen

2. Aus den beiden schiefen Winkeln kann die Hypothenuse berechnet werden. Dazu dient die Formel,

$$\cos. h = \frac{\text{cot. } A}{\text{tang. } B} \text{ oder } = \frac{\text{cot. } B}{\text{tang. } A}$$

3. Die Tangente eines schiefen Winkels darf nie der Kotangente des andern schiefen Winkels gleich seyn; das heißt mit andern Worten: Die beiden schiefen Winkel dürfen nie, wie in einem ebnen Dreiecke, einander zu 90° ergänzen. Denn in diesem Falle wäre cos. h = 1 also h = 0. Es müssen daher die beiden schiefen Winkel immer mehr als 90° mit einander halten; damit das ganze Dreieck mehr als 180° in sich faßt.

§. 39. Anwendung auf die Erd- und Himmelskugel.

Man wünscht für einem gegebenen Tag des Jahrs aus der Sonnenlänge (Abstand der Sonne vom nächsten Aequinoktialpunkte) und aus der Schiefe der Ekliptik, jenen Winkel zu berechnen, den die Deklinazion der Sonne mit der Ekliptik macht. Da nun diese Größe für den 11. Mai schon auf zweierlei Art herausgebracht worden, so soll dieß hier mit Fleiß auch zum drittenmal geschehen.

t. A = tang. B cos. h.

t. x = tang. 23° 28′ cos. 50°. 16′.

tang. 23° 28′ = 0. 6376106 — 1

cos. 50° 16′ = 0. 8056472 — 1

0. 4432578 — 1 =

Log. cotang. 74° 3′

gen beiden Auflösungen vollkommen überein:

Zur Selbstübung.

liche Rechnung führe man hier auch für den 29. Oktober.

mmlung aller bisher eroberten Formeln.

hnet man einen Vertikalbogen (perpendi- erhaupt durch p, und seinen gegenüberlie- kel mit W, dann den andern Perpendikel glich dessen Gegenwinkel mit W; so enthält ine Tabelle eine vollständige Uebersicht aller lle, die nur immer in einem rechtwinklich- en Dreiecke vorkommen können.

Dreiecke.

Gesucht.		Gegeben.	Formeln.
1		p, w	$\sin. h = \frac{\sin. p}{\sin. w}$
2		p, P	$\cos. h = \cos. p. \cos. P$
3	h	p, W	$\text{tang. } h = \frac{\text{tang. } p}{\cos. W}$
4		w, W	$\cos. h = \frac{\text{tang. } w}{\text{tang. } W}$
5		h, w	$\sin. p = \sin. w. \sin. h.$
6		h, P	$\cos. p = \frac{\cos. h}{\cos. P}$
7		h, W	$\text{tang. } p = \text{tang. } h. \cos. W$
8	p	P, w	$\text{tang. } p = \sin. P \text{ tang. } w.$
9		P, W	$\sin. p = \frac{\text{tang. } P}{\text{tang. } W}$
10		w, W	$\cos. p = \frac{\cos. W}{\sin. w}$

h, p	$\sin. w = \frac{\sin. p}{\sin. h}$
h, P	$\cos. w = \frac{\text{tang. P}}{\text{tang. h}}$
h, W	$\cot. w = \cos. h \text{ tang. } W$
p, P	$\text{tang. } w = \frac{\text{tang. p}}{\sin. P}$
p, W	$\sin w = \frac{\cos. W}{\cos. p}$
P, W	$\cos. w = \cos. P. \sin. W.$

oder W gesucht, so gelten an und für sich die Formeln, wie für p und w. Nur müssen statt die kleinen Buchstaben gesetzt werden, z. B.

$\frac{\cos. h}{\cos. P}$

Drit-

Drittet Abschnitt.

Von schiefwinklichten sphärischen Dreyecken.

§. 42. Wie jedes schiefwinklichte sphärische Dreyeck auf zwey rechtwinklichte zurück geführt werden könne.

Um ein schiefwinklichtes Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel auf zwey rechtwinklichte Dreyecke zurück zu führen, braucht es nichts weiter, als aus einem Winkel auf dessen Gegenseite einen Perpendikularbogen herabzufällen, so ist das schiefwinklichte Dreyeck in zwey rechtwinklichte zerlegt. Manchmal muß die Gegenseite verlängert werden, dann wird das gegebene Dreyeck zu einem rechtwinklichten erweitert, und die Erweiterung stellt selbst ein rechtwinklichtes Dreyeck vor, wie dieß Fig. 11 und 12 ersichtlich ist.

§. 43. Erster Lehrsatz für schiefwinklichte Dreyecke.

Auch hier verhalten sich die Sinusse der Seiten, wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel.

Beweis.

fälle auf jene Seite des Dreyecks, das nicht
nthalten ist, einen Perpendikularbogen hin,
zwey rechtwinklichte Dreyecke. Es ist nun
rsten Lehrsatze der Theorie der rechtwinklich-
e

sin. p = sin. C X sin. a
sin. p = sin. A X sin. c

sin. C X sin. a = sin. A X sin. c,
portion aufgelöset:
sin. a : sin. c = sin. A : sin. C.

§. 44. Zusatz.

s Dreyeck überhangend, wie Fig. 14, das
jener Bogen, worauf der Perpendikel hin-
en soll; verlängert werden, so geht der Be-
dermassen: Es ist im Dreyeck BCD
= sin. C. sin. a, dann im Dreyeck ABD
= sin. A. sin. c, weil bey A die bey-
inkel einerley Sinusse haben. Alles Uebri-
oben.

wendung auf die Erd- und Him-melskugel.

man auf dem Erdglobus den Pol für ein
rt, und führt für einen gegebenen Tag
er Sonne an den östlichen Horizont, so
wird,

die aufgehende Sonne um mehr oder weniger Grade vom wahren Ostpunkte entfernt seyn, und zwar im Frühling und Sommer gegen Nord, die übrige Zeit des Jahrs aber gegen Süden. Man nennt diesen Bogen des Horizonts in der Astronomie die nördliche und südliche Aufgangsweite (Amplitudo ortiva septentrionalis et meridionalis). Ein gleiches versteht sich auch von der Untergangsweite (Amplitudo occidua), die immer mit der ersten im Ganzen genommen einerley Größe hat. Man soll nun eine allgemeine Formel aufstellen, wodurch für jeden gegebnen Ort und auf jeden gegebnen Tag aus der Polhöhe p, aus der Sonnenlänge l und aus der Schiefe der Ekliptik e die Aufgangsweite w trigonometrisch bestimmt werden kann.

Auflösung.

Um eine solche Formel abzuleiten, muß vorher der Satz erwiesen seyn, daß jener Neigungswinkel, den der Aequator mit dem Horizont eines Orts macht, allemal die Polhöhe desselben Orts zu 90° ergänze.

Beweis.

Man stelle den Globus so, daß der Pol um 90° vom Horizont entfernt ist, so wird der Aequator und der Horizont in ein und denselben Kreis zusammen fallen, oder mit andern Worten, beyde Kreise werden sich decken. Macht man nun die Polhöhe um einige Grade kleiner, so wird sich der Aequator um eben so

viele

…schen Aequator und Horizont ersetzen, und …er oben aufgestellte Satz erwiesen. Wir … die Auflösung beginnen.

…tet man den Globus in der anfänglich … Stellung, so wird man finden, daß die …nge die Aufgangsweite und ein Ae… …k allemal ein schiefwinklichtes Dreyeck auf …ilden.

…z. stellt CF den Horizont, AD den Ae… … BE die Ekliptik vor. Es ist demnach …enlänge = l, bc die Aufgangsweite = …chiefe der Ekliptik = s, und v die Er… …Polhöhe zu 90°, welche mit dem stum… …n einerley Sinus hat. Der erste Lehrsatz …klichten sphärischen Dreyecken, daß sich …e der Seiten wie die Sinusse ih… …winkel verhalten, läßt sich also hier …nwenden; denn

…n. ab: sin. bc = sin. n: sin. m.

…n. n = sin. v = cos. p

…n. l : sin. w = cos. p : sin. s

$$\text{…n. w} = \frac{\text{sin. s sin. l}}{\text{cos. p.}}$$

§. 47.

Die Stadt München hat zur Polhöhe 48°. 10', es soll für sie die größte Aufgangsweite, die am längsten oder kürzesten Tag statt hat, berechnet werden.

Auflösung.

Zu dieser Jahrszeit ist I = 90°, also sin. l = I und sin. w = $\frac{\text{sin. } 23° \; 28'}{\text{cos. } 48° \; 10'}$

Log. sin. 23° 28' = 0. 6001181 — 1
Log. cos. 48° 8' = 0. 8242448 — 1
— +
0. 7758733 — 1 =
Log. sin. 36° 38'

Die Sonne geht demnach am längsten Tag in einer nördlichen Entfernung von 36° 38' vom wahren Ostpunkt auf; um eben so viel weicht sie am kürzesten Tag südwärts ab, so daß der ganze Spielraum aller Sonnenaufgänge für München 73° 16' beträgt.

§. 47. Einige Folgerungen aus dieser Formel.

1. An jenem Tage, wo Tag und Nacht gleich ist, geht die Sonne im Ostpunkt auf, und im Westpunkt nieder; denn für diesen Tag ist die Sonnenlänge = 0, daher auch sin. l = 0, und weil Null ein Faktor des Zählers in der Formel ist, auch sin. w = 0 oder w = 0.

2. Hie-

g haben, gar nicht unter? Denn in diesem
zuerst die Formel $\sin. w = \frac{\sin. s \sin. 1}{\cos. p}$ in
$p = \frac{\sin. s \sin. 1}{\sin. w}$ umgeändert, dann $w =$
$= 90°$ gesetzt werden. Man erhält dann:
in. s. Und die Antwort heißt hierauf: Allen
rn, die über 66° 32′ zur Polhöhe haben.

öthige Voraussetzung und Erklä-
ung für die folgenden Sätze.

hnet man durchgehends die drey Seiten ei-
nklichten Dreyecks durch a, b, c und ihre
l A, B, C, wie es bereits Fig. 12 ge-
und fällt man aus irgend einem Winkel,
ichen B hat, auf seine Gegenseite oder auf
gerung derselben einen Perpendikel p hin,
zwey Bögen, die man die Entfernung
ände der beyden Winkel an der
te vom Perpendikel nennt. Fällt der
in das Dreyeck hinein, so heißt die Ent-
s Winkels A vom Perpendikel $= x$, folg-
fernung des Winkels C vom nämlichen Per-
$= b - x$. Fällt der Perpendikel für das
aus, dann sind die Entfernungen x und b
d trifft im letzten Falle der Perpendikel auf
Seite, dann wird es gut seyn, um aller
keit vorzubeugen, die Buchstaben A und C
ch a und c zu verwechseln.

§. 50
49

In jedem schiefwinklichten Dreyecke sind die Produkte aus der Tangente eines anliegenden Winkels in den Sinus des Abstandes vom Perpendikel beyderseits gleich groß.

Satz Fig. 11.

tang. A sin. x = tang. C (sin. b ± x).

Beweis.

Man bestimme in jedem der beyden rechtwinklichten Dreyecke den Vertikalbogen p aus seinem gegenüber liegenden Winkel und aus dem andern Vertikal-Bogen, das ist, man suche p aus w und P, welches in der Tabelle so heißt:

tang. p = tang. w sin. P

d. i. rechts tang. p = tang. A sin. x

links tang. p = tang. C sin. (b ± x).

Folglich tang. A sin. x = tang. C sin. (b ± x).

§. 50. Dritter Lehrsatz über die nämliche Materie.

Dividirt man in einem schiefwinklichten Dreyeck den Kosinus einer Seite, die nicht Grundseite ist, durch den Kosinus ihrer Entfernung vom Perpendikel, so entstehen beyderseits gleiche Quotienten.

Satz

$\cos.(b \pm x)$ $\cos. x$

Beweis.

muß der Perpendikel beyderseits aus der
e und aus dem andern Perpendikel, das ist
nd P bestimmt werden. Man findet für
in der Tabelle

$$\cos. p = \frac{\cos. h}{\cos. p}$$

n Fig. 12 u. 14 rechts $\cos. p = \frac{\cos. e}{\cos. x}$

links $\cos p = \frac{\cos. a}{\cos.(b \pm x)}$

ch $\frac{\cos. a}{\cos.(b \pm x)} = \frac{\cos. c}{\cos. x}$

§. 51. Vierter Lehrsatz.

chiefwinklichten Dreyecken ist das
der Tangente einer Seite, die nicht
dseite angenommen wird, in den
jenes Winkels, der von bemeld-
und dem Perpendikel eingeschlos-
, beyderseits gleich.

Satz. Fig. 12.

g. a cos. m = tang. o cos. n

Beweis.

eyden rechtwinklichten Dreyecken kann der
aus seinem nichtgegenüberstehenden Winkel

und

nur in der Tabelle p aus h und W, und man findet:

tang. p = tang. h. cos. W

Dieß heißt hier links tang. p = tang. a. cos. m

und rechts tang. p = tang. c. cos. n

Folglich tang. a cos. m = tang. c. cos. n.

Fällt der Perpendikel für das Dreyeck hinaus, wie Fig. 14, dann muß der Satz heißen: tang. a cos. (m + n) = tang. c. cos. n.

§. 52. Nutzen dieser vier vorangeschickten Lehrsätze.

Die so eben erwiesenen 4 Lehrsätze enthalten die Schlüssel, durch deren Hilfe beinahe alle Rechnungsfälle, die in schiefwinklichten Dreyecken vorkommen können, aufgelöst werden. Ich sage beynahe, weil jene 2 Fälle, wo aus den 3 Winkeln die 3 Seiten, und wechselsweise, aus den Seiten die Winkel gefunden werden sollen, eine Ausnahme zu machen scheinen, und eine besondere Behandlung verdienen. Uebrigens läßt sich selten eine Auflösung in einer einzigen Formel darstellen, sondern es werden meistentheils hiezu zwey Ansätze erfordert. Diese Ansätze können freylich paarweise in einer Tabelle gesammelt, und mit den nöthigen Anmerkungen in Hinsicht der spitzigen und stumpfen Winkel, dann der Seiten, die bald größer bald kleiner als Quadranten sind, begleitet werden, wie man dieses auch wirklich schon in den meisten Lehrbüchern findet.

§ 53.

ten sphärischen Dreyecks.

des Dreyeck sechs Stücke, nämlich 3 Sei
Winkel hat, und da von diesen 6 Stücken
n seyn dürfen, so fragt sichs fürs erste,
Angabe modifizirt werden könne? Wenn
nen Dreyecken jenen Fall, wo aus den drey
nkeln die drey Seiten, oder wenigst das
er drey Seiten zu einander, berechnet wer-
cht ausnimmt, wie er auch mit der bey-
schränkung nicht wohl ausgenommen wer-
o fordert diese Frage in beyden Trigono-
der ebnen wie in der sphärischen, die
twort. Denn sie ist keine andere, als die-
in allen so viele Rechnungsfälle möglich,
rnen (Trinationen) in 6 Elementen stecken,
t wieder die Formel $N = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$
höriger Substitution $x = \frac{6.5.4.}{2.3.} = 20.$
lung dieser 20 Ternen aus den 6 Elemen-
BC, wo die kleinen Buchstaben die Sei-
großen Buchstaben die Winkel bedeuten,
Augen dargestellt.

1	a b c
2	a b A
3	a b B
4	a b C
5	a c A
6	a c B
7	a c C
8	a A B
9	a A C
10	a B C
11	b c A
12	b c B
13	b c C
14	b A B
15	b A C
16	b B C
17	c A B
18	c A C
19	c B C
20	A B C

Bey jeder dieser 20 Aufgaben kann nach dreyerley Stücken gefragt werden: das gäbe in allem 60 Rechnungsfälle. Allein mehrere dieser Rechnungsfälle laufen auf eines hinaus, z. B. aus drey Seiten die Winkel zu findrn ist an sich eine dreyfache Aufgabe; allein es ist beinahe eine Auflösung wie die andere. Das nämliche gilt, wenn aus den 3 Winkeln die Seiten gefunden werden sollen. So läßt sich auch von den 10 Nummern 2, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 18, und 19 eine Auflösung immer nach den ersten Lehrsatz abfertigen.

§. 54. Behandlung eines Falles, wo aus zwey Seiten und ihrem Zwischenwinkel die dritte Seite gefunden werden soll.

Man fälle aus dem Endpunkte der kleinen Seite Fig. 15 einen Perpendikel auf die größere, so bekömmt man zwei rechtwinklichte Dreyecke, und die größere Seite wird in zwei Bögen zerstückelt, die die Entfernung ihrer anliegenden Seiten vom Perpendikel vor-

ogen, der dem schiefen Winkel nicht ge=
berechnen läßt. Nennt man also den
Vertikalbogen p, so ist nach der Tabelle

tang. p = tang. h. cos. W

. 15. tang. x = tang. a. cos. B.

efunden, so ziehe man es von c ab, und
andere Entfernung vom Perpendikel c — x.

ißt sich der dritte Lehrsatz der schiefwink=
ecke anwenden, wo es heißt, daß die
welche enstehen, wenn man die Kosinus=
nbögen durch die Kosinusse ihrer Abstände
ikel dividirt, beyderseits gleich sind. Es

$$\frac{\cos. a}{\cos. (c-x)} = \frac{\cos. b}{\cos. x}$$

$$\frac{\cos. a. \cos. x}{\cos. (c-x)} = \cos. b.$$

e andere Auflösung dieses Falls.

m man die beiden Segmente x und c — x
, kann auch noch der Perpendikel berech=
Er ist

sin. p = sin. w. sin. h.

sin. p = sin. B. sin. a.

ennt man in dem zweyten rechtwinklichten
zwey Vertikalbögen, woraus sich die Hy=

$$\cos. h = \text{oos. p. cos. P},$$

und hier $\cos. b = \cos. p. \cos. (e - x)$, wo

durch der Fall wieder aufgelöset ist.

§. 56. Anwendung dieses erörteten Falls auf die mathematische Geographie.

Aus den geographischen Längen und Breiten zweyer Oerter auf der Erdoberfläche, den Abstand derselben von einander zu bestimmen.

Z. B. Wie weit ist Rom von Paris entfernt? Die geographische Länge von Rom ist 30° 9′ und dessen Breite 41° 54′. Eben dieselbe Länge von Paris beträgt 20° und dessen Breite 48° 50′.

Auflösung.

Es sey Fig. 16 P der Nordpol, DH ein Stück des Aequators, PD der erste durch Ferro gezogene Meridian, der Punkt A stelle Paris und der Punkt B Rom vor, AE und BF sind demnach die geographischen Breiten, so wie DE und DF die geographischen Längen dieser beyden Städte. AP und BP bedeuten ihre Ergänzungen zu 90°. Der Bogen AB endlich, oder die Entfernung der beyden Punkte muß hier bestimmt werden.

des Winkels m vorstellt, so sind in dem Dreyecke A B P zwey Seiten und der Zwi bekannt. Man fälle den Perpendikel A C zuerst die Entfernung P C, nach obiger

tang. p = tang. h. cos. W.
tang. PC = tang. AP. cos. m.
ang. AP = cotang. AE, und m = DF
so kann auch substituirt werden:
PC = cotang. AE, cos. (DF — DE)

Worten ausgedrückt hieße dieß nun so: Die der gesuchten Entfernung des n Perpendikel ist gleich dem Pro s der Kontangente der grösern n den Kosinus der Längendiffe in einer Formel ausgedrückt:

e = cotang. B. cos. (L — l), wo e ung, B die grössere Breite, dann L und l Längen bedeuten.

ir hier weiter schreiten, sollen ein paar über die eben aufgestellte Formel gemacht

trägt die Längendifferenz genau 90°, dann — l) = o folglich auch die Entfernung heißt, die Hypothenuse wird zum Verti weil die Punkte C und P zusammenfallen

und

2. Beträgt die Längedifferenz mehr als 90°, dann ist der cos. (L — l) negativ, d. h., die Entfernung des Perpendikels hat eine verkehrte Lage, und begehrt, um den andern Perpendikel zu finden, addirt statt subtrahirt zu werden.

3. Hält die größere Breite 90°, d. h.: liegt ein Ort im Pol, so ist cotang. 90 = 0, und es kann wieder keine Entfernung gedenkbar seyn.

4. Ist die größere Breite südlich, das ist negativ, dann wird das ganze Produkt (wenn (L — l) nicht über 90° geht) negativ seyn. Folglich hat die Tangente der Entfernung einen negativen Werth, das heißt, die Entfernung hält mehr als 90° u. s. w.

Nun in der Auflösung wieder fortgefahren!

Man substituire also in tang P C = cot. B. cos. (L — l) gehörig,

so erscheint tang. P C = cot. 48° 50′ cos. (30° 9′ — 20°) = cot. 48° 50′. cos. 10° 9′

Log. cotang. 48° 50′ = 0. 9417135 — 1
Log. cos. 10° 9′ = 0. 9931494 — 1

0. 9348629 — 1
= Log tang. 40° 42′

Also P C = 40° 42′.

Es ist aber B P 90° — 41° 54′ = 48° 6′

Folg-

che in der Figur durch B C bezeichnet ist.

mache nun auch noch den Perpendikel A C
und zwar durch die Formel:

in. p = sin. w. sin. h
A C = sin. m. sin. A P
nein sin. A C = sin. (L — I) cos. B.,
er ähnliche Reflexionen wie oben machen lassen.

Substitution giebt sin. A C = sin. 10° 9
40'

g. sin. 10° 9' = 0. 2460695 — 1
g. cos. 48° 50' = 0. 8183919 — 1

0. 0644614 — 1 =
Log. sin. 6° 40'

ch muß in dem Dreyecke A B C aus den
rtikalbögen A C und B C die Hypothenuse
die verlangte Distanz gefunden werden.
hiezu die bekannte Formel

sos. h. = cos. p. cos. P.
cos. A B = cos. 6° 40'. cos. 7° 14'.

g. cos. 6° 40' = 0. 9970535 — 1
g. cos. 7° 24' = 0. 9963677 — 1

0. 9934212 = 2 =
Log. cos. 9° 56'.

Es

geschlagen 149 beträgt.

*) Ich habe mir noch eine andere Methode abgezogen, um aus den geographischen Längen und Breiten zweier Ortschaften, ihre Entfernung von einander zu bestimmen. Sie ist, wenn man die Längen l und L, und die Breiten b und B setzt, in vier kleine Formeln abgefaßt. Die erste heißt:

$$\sin. x = \cos. B. \sin. (L - l)$$

Die zweite Formel:

$$\cos. y = \frac{\sin. B}{\cos. x}$$

Die dritte:

$$z = 90° - y - b.$$

Die vierte:

$$\cos. u = \cos. x. \cos. z.$$

Zur Beleuchtung dieser Methode soll die Entfernung der Stadt Paris von Petersburg berechnet werden.

Die geographische Länge von Paris ist 20° 0′
von Petersburg 47° 59′
die Breite von Paris 48° 50′
von Petersburg 59° 56′

Also L = 47° 59′
l = 20

L — l 27° 59′
b = 48° 50′
B = 59° 56′

Bes

. sin. $27^\circ\ 59' = 0.6713716 - 1$

$0.3712157 - 1 =$
Log. sin. $13^\circ\ 36'$

$x = 13^\circ\ 36'.$

Berechnung der zweiten Formel:

g. sin. $59^\circ\ 56' = 0.9372385 - 1$

g. cos. $13^\circ\ 36' = 0.9876488 - 1$

$- \quad +$

$0.9495897 - 1 =$
Lcg. cos. $27^\circ\ 5'$

$= 27^\circ\ 5'$

Berechnung der dritten Formel:

90

$y = 27\ 5$

$72\ 55$

$b = 48\ 50$

$y - b = 14^\circ\ 5' = z.$

Berechnung der vierten Formel:

os. $13^\circ\ 36' = 0.9876488 - 1$

os. $14^\circ\ 5' = 0.9867461 - 1$

$0.9743949 - 1 =$
Log. $19^\circ\ 30'.$

ft also Paris von Petersburg entfernt $19\frac{1}{2}^\circ$

$\times 15 = 292\frac{1}{2}$ geographische Meilen.

§. 58.

des sphärischen Dreyecks die Winkel zu bestimmen.

Bezeichnet man die drey Seiten allgemein durch a, b und c, dann die drei gegenüberstehenden Winkel mit A, B und C, so ist der Kosinus eines schiefen Winkels gleich dem Kosinus der Gegenseite, weniger dem Produkt aus den Kosinussen der übrigen beiden Seiten, alles getheilt durch das Produkt aus den Sinussen dieser Seiten.

Satz.

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c.}$$

Beweis.

Man theile das Dreyeck Fig. 17 durch einen schicklichen Vertikalbogen in zwey rechtwinklichte Dreyecke, ziehe die Sinusse von den beyden Seitenbögen sowohl als vom Vertikalbogen, und verbinde sie durch dazwischen gezogene Linien zu ebnen Dreyecken. Es wird demnach seyn:

$$dC = \sin. b, \quad dk = \cos. b,$$
$$gC = \sin. a, \quad gk = \cos. a.$$

Ferner $\sin. hCd = \cos. A.$

1. Nun ist in dem $\triangle dCh$

$$dh : dC = \sin. dCh : 1$$

subst. $dh : \sin. b = \cos. A : 1$

und $dh = \sin. b. \cos. A.$

Auch

$= Cg^2 - CH^2$ u. im vorigen $\triangle dCh$

$= dC^2 - dh^2$, folglich subst., giebt

$= Cg^2 - dC^2 + dh^2$.

im $\triangle$ d g k endlich ist:

$= dk^2 - gk^2 - 2\,dk.\ gk\ \cos.\ x.$

un muß $h\,d\,k = 90°$ seyn; denn ist eine
vom $\triangle$ d C h auf dem Halbmesser A k senk-
t nothwendig auch die andere Linie d h senk-
Ak. Folglich sin. m = cos. n.

es gilt aber in dem Dreyecke d g k die

$$gk : dg = \sin.\ m : \sin.\ x$$

$$\cos.\ a : dg = \cos.\ n : \sin.\ c$$

$$dg = \frac{\cos.\ a.\ \sin.\ c}{\cos.\ n}.$$

ndlich hat auch in dem $\triangle$ d g h die Glei-

$: dh^2 + dg^2 - 2\,dh.\ dg.\ \cos.\ n.$

$n.\ 2.\ gh^2 = Cg^2 - dC^2 + dh^2.$

$-dC^2+dh^2=dh^2+dg^2-2dh.\,dg.\cos.n.$

ürzt:

$- dC^2 = dg^2 - 2\,dh.\ dg.\ \cos.\ n.$

stituirt:

$\sin.^2 b = \cos.^2 b + \cos.^2 a - 2\cos.\ b.$
$.\ \cos.\ c. - 2\sin.b.\ \cos.A.\ \sin.c.$

$os.\ A.\ \sin.\ c = \sin.^2 h - \sin.^2 a +$

cos.

Daher

$$2 \sin. b. \cos. A. \cos. a. \sin. c = 1 - \sin.^2 a + \cos. a - 2 \cos. b. \cos. a. \cos. c.$$

Ferner ist auch $1 - \sin.^2 a = \cos.^2 a$.

Folglich:

$$2 \sin. b. \cos. A. \cos. a. \sin. c = 2 \cos.^2 a - 2 \cos. b. \cos. a. \cos. c.$$

Die Gleichung durch 2 cos. a getheilt, giebt:

$$\sin. b. \cos. A. \sin. c = \cos. a - \cos. b. \cos. c.$$

und endlich $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c.}{\sin. b. \sin. c.}$

§. 58. Einige Folgesätze.

1. Ein kleiner Ueberblick auf die Analogie dieser Formel lehret jeden, daß

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a. \cos. c}{\sin. a. \sin. c.}$$

und $\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a. \cos. b}{\sin. a. \sin. b}$ seyn müße.

2. Setzt man $a = b$, so muß auch $A = B$ seyn; denn $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. a. \cos. c}{\sin. a. \sin. c}$

und $\cos. B = \frac{\cos. a - \cos a. \cos. c}{\sin. a. \sin. c}$

Folglich $\cos. A = \cos. B$

und $A = B$

$$\sin.^2 a \qquad 1 - \cos.^2 a$$

$$\text{s. } \acute{a}\ (1 - \cos.\ a) = \cos.\ a$$

$$\text{cos. a) (1 - cos. a)} \qquad \cos.\ a + 1$$

nu nun das nämliche für cos. B und cos.
folgt, daß in gleichseitigen Dreyecken auch
gleich seyn müssen.

t einer von den 3 Winkeln 90°, ist
= 90°, dann muß cos. a = cor. b.
; weil a zur Hypothenuse wird, und wirk-

$$= \frac{\cos.\ a - \cos.\ b \cos.\ c}{\sin.\ b.\ \sin.\ c}$$

sin. c.

= cos a — cos. b. cos. ●

aos. b. cos. c = cos. a.

nd die Seiten lauter Quadranten, so ist
i so auch cos. B und cos. C = 0 folg-
nd C jeder ein rechter Winkel.

d bloß jene 2 Seiten, die den gesuchten
n, zwey Quadranten, dann muß natürlich
ite das Maaß des Zwischenwinkels seyn;
dieser Seite in dem Scheitel dieses Win-
Die nämliche Antwort ertheilen auch die
nn man z. B. in

$$= \frac{\cos.\ a - \cos.\ b \cos.\ c}{\sin.\ b \sin.\ c.}$$

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. 90^\circ . \cos. 90^\circ}{\text{siu. } 90^\circ . \sin. 90^\circ} = \frac{\cos. a - ox}{1. \ 1}$$

$= \cos. a.$ Also $A = a.$

Das Nämliche ergiebt sich, wenn in

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a. \cos. c}{\sin. a. \ \sin. c.}$$

$a = 90^\circ$ und $c = 90^\circ$,

oder in $\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a. \cos. b}{\sin. a. \sin. b.}$

$a = 90^\circ$ und $b = 90^\circ$ gesetzt wird.

7. Ist nur eine Seite ein Quadrant, und zwar die gegenüberstehende Seite des gesuchten Winkels, dann entsteht:

$$\cos. A = \frac{\cos. 90 - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \ \sin. c} = \frac{- \cos. b. \ \cos. c}{\sin. b. \sin. c.}$$

$= -$ cotang. b. cotang. c., wo sich also A als stumpfer Winkel ausspricht, wenn nicht eine von den beyden Seiten größer als ein Quadrant ist.

8. Ist endlich von jenen beyden Seiten, die den Winkel bilden, eine ein Quadrant, so ergiebt sich entweder

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. 90^\circ . \ \cos. c}{\sin. 90^\circ . \ \sin. c} = \frac{\cos. a}{\sin. c}$$

$$\text{od. } \cos. A = \frac{\cos. a \ \ \cos. b. \ \cos. 90^\circ}{\sin. b. \ \sin. 90} = \frac{\cos. a}{\sin. b}$$

welches Ereinniß auch in den beyden übrigen Formeln

$\frac{\text{sin. a.}}{\text{sin. b}}$ ſtatt hat.

mittelbare Erweiſung eines und
n ſo eben abgeleiteten Satzes.

er Fall ſtatt, daß ſich unter den drey ge-
iten ein voller Quadrant befindet, dann
aus einer von den beyden andern Seiten
erliche Verlängerung oder Abkürzung eben-
Quadranten. Geſetzt, es ſey Fig. 18 b =
< 90°. Man verlängere alſo dieſes a
uck m, ſo daß a + m = 90°. Zieht
ie Schlußſeite n, ſo iſt in dem rechtwink-
cnm
= hyp.
= perp.
= Perp.

demnach die Formel anwendbar:

$= \frac{\text{cos. h}}{\text{cos. p}}$

aber der Bogen n = P das Maaß des
im Pol iſt, und weil m = p den Bo-
0° ergänzt, folglich cos. p = sin. a. iſt,
Subſtitution cos. C = $\frac{\text{cos. c}}{\text{sin. a}}$, wie oben
t worden.

als Hypothenuse, c als der kleine Perpendikel und als yessen Gegenwinkel angesehen werden. Man bekommt in der Tabelle für diesen Fall

$$\sin. w = \frac{\sin. p}{\sin. h}$$

$$\text{das ist } \sin. C = \frac{\sin. c}{\sin. b}$$

Weil aber b ebenfalls 90° hält, so kann in diesem Falle substituirt werden:

$$\sin. C = \frac{\sin. c}{\sin. 90°} = \frac{\sin. c}{1} = \sin. c.$$

Sind nun die Sinusse gleich, so sind es auch ihre zugehörigen Winkel und Bögen; daher

$$C = c,$$ wie n. 6 erwiesen worden.

§. 60. Bearbeitung eines hieher gehörigen praktischen Falls.

Wenn Fig. 15 die Seite a = 87° 44'

b = 52 20

und c = 129 56 hält;

welche Maaße werden die ihnen gegenüberstehenden Winkel A, B und C haben?

Auflösung.

Man bestimmt zuerst A nach der Formel:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c.}$$

Die

Substitution giebt:

$$\frac{\cos. 87^\circ\ 44' - \cos. 52^\circ\ 20'. \cos. 129^\circ\ 56'}{\sin. 52^\circ\ 20'. \sin. 129^\circ\ 56'}$$

berechne das negative Produkt der Beyden

$$\begin{aligned}
&\cos. 52^\circ\ 20' = 0.\ 7860886 - 1\\
&\cos. 129^\circ\ 56' = 0.\ 8074646 - 1\\
&\qquad\qquad 0.\ 5935532 - 1 =\\
&\qquad\qquad \text{Log.} \quad -\ 0{,}39224
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
87^\circ\ 44' &= 0{,}\ 03955\\
+\ &-\ 0{,}\ 39224\\
&\overline{0{,}\ 43179,}
\end{aligned}$$

Werth des Zählers.

nung des Nenners:

$$\begin{aligned}
&\sin. 52^\circ\ 20' = 0.\ 8983968 - 1\\
&\sin. 129^\circ\ 56' = 0.\ 8846775 - 1\\
&\qquad\qquad 0.\ 7830743 - 1\\
&\qquad\qquad +\\
&\overline{\qquad\qquad 0.\ 8521983 - 1 =}\\
&\qquad\qquad \text{Log. cos. } 44^\circ\ 39'
\end{aligned}$$

$$\frac{0.\ 43179}{} = 0.\ 6352726$$

demnach der Winkel A $44^\circ\ 39'$

Weise läßt sich auch der Winkel B

also dem Fleiße des

die dritte 66° 36'; welche Winkel stehen diesen Seiten e
gegen?

§. 62. Ein Lehrsatz, der eine merkwürdi Verwandlung der spärische Dreyecke betrifft.

Werden aus den drei Seiten eines sphärisch Dreyecks durch erforderliche Verlängerung oder Abki zung, die man an den beyden Endpunkten derselb vornimmt, Quadranten gemacht, und durch die neu Endpunkte dieser Quadranten Bogen größter Kreise g legt, so kann man behaupten, daß diese Bögen e neues Dreyeck bilden, wo die Winkel die Ergänzun gen der Seiten des vorigen Dreyecks zu 180° vo stellen.

Voraussetzung. Fig. 20.

Wenn Fige $AC + CD = 90°$
und $AC + AL = 90°$

Satz.

$$N = 180 - AC$$

Beweis.

Bringt man die beyden Voraussetzungen in ein Summe, so erhält man

$$AL + AC + CD + AC = 180°$$
Aber $AL + AC + CD = DL$

folg=

$$N + AC = 180°$$

zt $N = 180° - AC.$

gleiche Weise läßt sich auch der Beweis für
übrigen Winkel führen.

3. Wichtiger Folgesatz daraus.

t man das verwandelte Dreyeck FKN als
hes Dreyeck an, und führt jede Seite an
dpunkten auf Quadranten zurück, so erhält
darum ein Dreyeck, wo die Seiten die Er-
der Winkel des vorigen zu 180° vorstel-
se wechselseitige Verwandlung führt den Vor-
ey, daß man dadurch in den Stand gesetzt
us den 3 Winkeln eines sphärischen Dreyecks
3 Seiten zu berechnen. Denn man darf nur
Winkel die Ergänzungen zu 180° schreiben,
s Seiten in die Rechnung bringen, so er-
als Winkel die Ergänzungen der Gegenseite
Wenn demnach Fig. 20 die Winkel A, B und
i sind, und man wünscht die Seiten a, b
raus zu bestimmen, so schreibe man in obige

$$= \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c} \text{ so an:}$$

$$0 - a) =$$

$$0 - A) - \cos. (180 - B) \cos. (180 - C.$$

$$\sin. (180 - B) \sin. (180 - C).$$

$\cos.(\alpha - \beta) = \cos.\alpha.\ \cos.\beta + \sin.\alpha.\ \sin.$

folglich wenn man $\alpha = 180$ und $\beta = a$ gelten

so erscheint:

$\cos.(180 - a) = \cos.180.\ \cos.a + \sin.180\ s$

Allein $\cos.180 = -1$

und $\sin.180 = 0$

Daher

$\cos.(180 - a) = -\cos.a$, also auch

$\cos.(180 - A) = -\cos.A$,

$\cos.(180 - B) = -\cos.B$ u. $\cos.(180 - C) = -$ co

und weil aus dem Begriffe von Nebenwinkeln

$\sin.(180 - B) = \sin.B$ und $\sin.(180 - C) = \sin.$

so ergiebt sich die Substitution

$$-\cos.a = -\frac{\cos.A + \cos.B.\ \cos.C}{\sin.B.\ \sin.C.} \text{ oder}$$

$$\cos.a = \frac{\cos.A - \cos.B.\ \cos.C}{\sin.B.\ \sin.C}$$

Man kann sich also ganz der nämlichen For
bedienen, um aus den Winkeln die Seiten zu ber
nen, die oben aufgestellt worden, aus den Se
die Winkel zu finden.

Vier

Vierter Abschnitt.

ung verschiedener Flächenfiguren und an derer Theile auf der Kugel.

Flächeninhalt sphärischer Dreyecke.

net man die 3 Winkel eines sphärischen Drey= h A, B und C, dann den Halbmesser der auf deren Oberfläche das Dreyeck befindlich ist, so gilt der

Satz. Fig. 22.

$$\Delta = \frac{r^2\pi\,(A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ)}{180^\circ},$$

Beweis.

n verlängere alle 3 Seiten des Dreyecks ABC n Kreisen, und ziehe die 3 Durchmesser Aa, Cc, so werden sich dieselben im Mittel= er Kugel G schneiden, und gleiche Zwei= bilden. Daraus geht hervor, daß der Bogen ADb = adA, ferner AEc = aeD

und

Nun ist jedes Flächenstück der Kugel, das

zwey größten Kreisen eingeschlossen ist, $= \frac{r^2 \pi}{90}$

wo Φ die Grade bezeichnet, die der eingeschlo

Winkel enthält, wie eben erwiesen worden. A

$$ABC + aeCBda = \frac{r^2 \pi A^\circ}{90^\circ}$$

welches durch Substitution gleicher Werthe giebt:

$$ABC + AEcbDA = \frac{r^2 \pi A^\circ}{90^\circ};$$

aus gleichem Grunde

$$ABC + ADbfCA = \frac{r^2 \pi B^\circ}{90^\circ},$$

und $ABC + ABFcEA = \frac{r^2 \pi C^\circ}{90^\circ}.$

Die Summe dieser 3 Gleichungen ist:

$$3\,ABC + AEcbDA + ADbfCA + AAFbEA =$$

$$(A^\circ + B^\circ + C^\circ)\,\frac{r^2\,\pi}{90^\circ}$$

$$-\,2\,ABC \qquad = -\,2\,ABC$$

Bleibt: $AAC + AEcbDA + ADbfCA + ABFcEA =$

$$(A^\circ + B^\circ\ C^\circ)\,r^2\,\pi \quad -ABC$$

$$\frac{}{90^\circ}$$

Betrachtet man die linke Seite der Gleichun

in der Figur, so ist nichts leichters als sich zu übe

zeugen, daß die 4 Bestandtheile derselben die hal

be

$$\pi = \frac{(A^\circ + B^\circ + C^\circ)\, r^2 \pi}{90^\circ} - 2\,ABC.$$

$$\pi = \frac{(A^\circ + B^\circ + C^\circ)\, r^2 \pi}{180^\circ} - ABC$$

$$ABC = \frac{(A^\circ + B^\circ + C^\circ)\, r^2 \pi}{180} - r^2 \pi.$$

iche Nenner hergestellt.

$$C = r^2 \pi \frac{(A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ)}{180^\circ}.$$

Folgesätze.

die eingeklammerte Größe $(A^\circ + B^\circ + C^\circ$ allemal den Ueberschuß der drey sphärischen über 180° bedeutet, so läßt sich obiger Lehrgendermaßen mit Worten ausdrücken: Der inhalt eines sphärischen Dreyecks wird gefunden, an den Ueberschuß der 3 Winkel über 180°. m Quadrat des Halbmessers der Kugel und Ludolphine multiplizirt, und das Produkt durch dividirt. Bezeichnet man demnach obbenann. erschuß durch u°, so kürzt sich der Ausdruck tzes auf folgende Art ab.

$$\Delta = \frac{r^2 \pi\, u^\circ}{180^\circ}.$$

2.

kel bis 180° abnehmen. Dieß folgt sowohl aus
oben aufgestellten Formel, als aus dem §. 13. h
leiteten Begriffe des Minimums sphärischer Dreyec

3. Um ein Maximum zu erhalten, muß der
halt der 3 Winkel 540° halten. In diesem F
wäre also u° = 540° — 180° = 360°,
für die Formel giebt max. $\triangle = \frac{r^2 \pi 360°}{180°} = 2r^2$

Es nähert sich demnach das größte sphäri
Dreyeck an Inhalt der halben Kugelfläche.

4. Schliessen 3 Quadranten ein sphärisches Drey
ein, dann muß der Flächeninhalt desselben den 8t
Theil der Kugelumflächung gleich seyn. Und wirkl
verhält sich auch die Sache so; denn $u° = 270° -$
$180° = 90°$, folglich $\triangle = \frac{r^2 \pi 90°}{180°} = \frac{1}{2} r^2$
welches so viel beträgt als $\frac{4 r^2 \pi}{8}$.

5. Sind beym sphärischen Dreyecke nur zwey Qu
dranten, so hängt der Flächeninhalt bloß allein vo
jenem Winkel ab, welcher von beyden Quadrante
eingeschlossen ist; wie sich dieser Winkel erweitert ode
verengt, erweitert und verengt sich auch der Flächen
inhalt des Dreyecks. Es sey demnach $B = 90°$
und $C = 90°$, folglich $A + B + C = A + 90°$
$+ 90° = A° + 180$. Dieß giebt in der Formel

der Erdkugel zwey Meridiansbögen mit dem
bogen des Aequators ein.

65. Eine praktische Anwendung.

f dem Erdglobus schliessen was immer für zwey
nsbögen und der dazwischen liegende Per-
ein sphärisches Dreyeck ein. Es soll der
nhalt eines solchen Dreyecks berechnet werden.

sey z. B. Fig. 16 der Meridianbogen PC =
', und mache mit dem Meridianbogen AP
Winkel von 36°; welche Fläche schliessen wohl
iden Meridiane mit dem dazwischen liegenden
ikel auf der Erdkugel ein? Es beträgt aber
lbmesser der Erde 859,5 geographische Meilen.

Auflösung.

allem muß der Winkel bey A berechnet werden.
C ein rechter Winkel ist, so gehört dieser
den rechtwinklichten Dreyecken, und zwar in
tegorie, wo zwischen zwey schiefen Winkeln und
Vertikalbogen eine Gleichung gesucht werden
Diese Gleichung liefert der vierte Lehrsatz,
ißt, cos. A = aos. a. sin. B. oder oos. B =
sin. A. Nennt man nun den Winkel bey P =

$$\cos. x = \cos. 48^\circ\ 10'.\ \sin. 36^\circ.$$

Log. cos. 48° 10′ = 0. 8241037 — 1
Log. sin. 36° = 0. 8241037 — 1

0. 5933224 — 1
Log cos. 66° 5

Es hält demnach der Winkel bey A — 66° 5

Nun kann in obiger Formel $x = r^2 \pi (A + B + C)$ 1

$$180$$

so substituirt werden.

$$1 = (859{,}5).^2 \frac{3{,}14\,(90^\circ + 36^\circ + 66^\circ\ 55^\circ - 180}{180.}$$

$$= \frac{(859{,}5).^2\ 3{,}14.\ 12^\circ,\ 55'}{180}$$ oder in Minuten aufgelöst

$$= \frac{(859{,}5).^2\ 3{,}14.\ 775}{10800.}$$

Log. 859,5 = 2. 9342459
2. 9342459
Log. 3,14 = 0. 4971499
Log. 775 = 2. 8893017

9. 1549434
Log. 10800 = 4. 0334238

5. 2215196 = Log. 166550

Quadratmeilen.

Dreyecks mit δ ſtatt mit x, ſo gehen durch ei=
ßte Verſetzung aus obiger Aequation

$$\delta = r^2 \pi \frac{(A+B+C-180)}{180}$$

e 3 Formeln hervor:

$$r = \sqrt{\frac{180\delta}{(A+B+C-180)\pi}}$$

$$\pi = \frac{180\delta}{(A+B+C-180)\, r^2}$$

$$C = \frac{180\delta}{r^2 \pi} + 188 - (A+B) \text{ u. ſ. w.}$$

§. 67. Eine Anwendung hierüber.

enes ſphäriſche Dreyeck auf der Erdkugel, das
nem Quadranten der Ekliptik, von einem Qua=
des Aequators, nnd von dem dazwiſchen
en Bogen des Kolnrs (Meridian der durch die
alpunkte geht) begränzt wird, hält einer zuver=
Berechnung zu Folge 302566 Quadratmeilen.
nun aus dieſer Angabe die Schiefe der Ekliptik
t werden.

Auflöſung.

a die übrigen beyden Winkel wegen der 2 Qua=
zwey rechte Winkel ſeyn müſſen, ſo fallen aus
er gehörigen Formel $C = \frac{180\delta}{r^2 \pi} + 180 -$
B)

die

Und es bleibt noch für den Kalkul übrig:

$$C = \frac{180.\ 302566}{(859{,}5).^2\ 3{,}14..}$$

Log. 859,5 = 2. 9343459

2

5. 8984918

Log. π = 0. 4971499

6. 3056417, Logarithm des

Divisors.

Log. 180 = 2. 552725

Log. 302566 = 5. 4808206

7. 7360931 Logarithm des

Dividends 6. 3650417

1. 3704514 = L. 23;467°

Man mache den Dezimalbruch zu Minuten.

0, 467

60

28, 020 Minuten.

Folglich beträgt die Schiefe der Ekliptik 23° 28' wie wir sie aller Anfang angenommen haben.

Zur Selbstübung.

Welche Fläche ist wohl von der Ekliptik, Aequator and von der größten Abweichung der Sonne eingeschlossen?

biets der Sphärik.

Flächenstücke auf der Kugel zu berechnen, die
n drey Bögen größter Kreise hineinfallen, ist
eitem nicht so wichtig, als die Größen der bey-
alten Zonen, der beyden gemäßigten und
eißen Zone auf der Erdkugel zu bestimmen.
kann also mit Recht die Forderung an die Sphä-
chen, sich hier mit Rechnungen dieser Art zu
n, wenn sie je ohne Differential = und Inte-
kul geführt werden können.

lm dieses zu leisten, will ich zuerst die Umflä-
der ganzen Kugel nach meiner neuerfundnen
rlegen.

. Lehrsatz, die Oberfläche der ganzen Kugel betreffend.

Das vierfache Quadrat des Halbmessers der Kus
t der Ludolphine multiplizirt giebt die Oberflä-
ganzen Kugel. Wenn demnach U die Umflä-
r den Halbmesser und π die Ludolphine be-
t, so heißt der

Satz.

$$U = 4 r^2 \pi.$$

Beweis.

Bekanntlich ist der kubische Inhalt der Kugel:

$$= \frac{d^3 \pi}{6}$$

oder

$$s = \frac{4\,r^3\,\pi}{3}$$

Man bilde sich nun ein, der Halbmesser der K
gel wachse um einen unendlich kleinen Theil, näml
um $\frac{r}{s}$, so wird sich eben darum die Kugel mit ein
unendlich dünnen Hülle überziehen. Diese Hülle b
kömmt man, wenn man die ursprüngliche Kugel a
der gewachsnen Kugel herausnimmt, oder was d
Nämliche sagen will, beyde Kugeln von einander a
zieht. Es ist aber die gewachsne Kugel

$$\frac{4\pi}{3}\left(r+\frac{r}{s}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\left(r^3+3\frac{r^3}{s}+3\frac{r^3}{s^2}+\frac{r^3}{s^3}\right)$$

Davon $4\,r^3\,\pi$ abgezogen, bleibt die Hülle:

$$\frac{4\pi}{3}\left(3\frac{r^3}{s}+3\frac{r^3}{s^2}+\frac{r^3}{s^3}\right)$$ wovon die beyde

Glieder $\frac{3\,r^3}{s^2}+\frac{r^5}{s^3}$ als unendlich kleine Größen h
herer Ordnung von selbst hinausfallen, also

$$\text{Hülle} = \frac{4\cdot 3\,r^3\,\pi}{3s} = \frac{4\,r^3\,\pi}{s}$$

Diese Hülle ist aber noch immer ein Körper, des
sen Dicke der Wachsthum des Halbmessers r ist. Di
s
vidirt man sie durch dieselbe, so erscheint eben darum
die Umflächung der Kugel in ihrem reinen Zustande

$$U = \frac{4\,r^3\,\pi}{s} : \frac{r}{s} = 4\,r^2\,\pi$$

An

er Halbmesser der Erdkugel hält
eographische Meilen; wie groß ist die
chung der ganzen Erdkugel?

Auflösung.

$$\log. 859{,}5 = 2.\ 9342459$$

$$\log. 4 = 0.\ 6020600$$

$$\log. \pi = 0.\ 4971499$$

$$\log. 6.\ 9676017 = \mathfrak{L}.\ 9281150$$

$$\log. \frac{5995}{22}$$

ie Umflächung der ganzen Erdkugel beträgt dem-
hr nahe 9281150 Quadratmeilen.

Zur Selbstübung.

Mond hält im Durchmesser 468,6 geographische Mei-
e vielmal kleiner mag wohl die Oberfläche dieses Ne-
ten seyn, als die Oberfläche der Erde?

Kugelfläche zwischen zwey größten Kreisen eingeschlossen.

ennt man den Halbmesser einer Kugel $= r$,
inkel am Pol, wo sich die zwey größten Krei-
schneiden $= \varphi$, und die Ludolphinische Zahl
.. $= \pi$, so ist das Stück der Umflächung

ei-

$$f = \frac{r^2 \varphi \pi}{90}.$$

Beweis.

Das zwischen zwey grössten Kreisen liegende Flächenstück hängt ganz von jenem Winkel ab, der Pol von den besagten Kreisen eingeschlossen wird. verhält sich demnach das Flächenstück zwischen die Kreisen f zur ganzen Umflächung der Kugel $4r^2$ wie der Zwischenwinkel zum Inhalt aller Winkel den Pol herum, nämlich zu 360°.

Daher $f : 4r^2\pi = \varphi^\circ : 360^\circ$

$360^\circ f = 4r^2 \pi \varphi^\circ$

$:4 \quad 90^\circ f = r^2 \pi \varphi^\circ$

$:90 \quad f = \frac{r^2 \pi \varphi^\circ}{90^\circ}.$

Anwendung.

Auf dem Globus sind die Meridiane von 10 zu 10 Grad gezogen. Wie gross ist wohl die Fläche auf der Erdkugel zwischen zwey solchen Mittagskreisen, z. B. die durch Lille in Frankreich und durch Braunau in Baiern gezogen sind, deren geographische Längen gegen 20° und 30° betragen? Man rechne aber bekanntlich den Halbmesser der Erdkugel, wie schon öfter erinnert worden, zu 859,5 geographische Meilen

giebt

$$\frac{90^\circ}{859{,}5.^2\ 10.^\circ\ 3{,}14\ldots} = \frac{859{,}5.^2\ 3{,}14\ldots}{9}$$

90°

d die Rechnung logarithmisch gestellt:

$$859{,}5 = 2.9342459$$

$$\frac{2}{5.8684918}$$

$$\pi. \quad = 0.4971499$$

$$6.3656417$$

$$9 \qquad 0.9542425$$

$$5.4113992 = \text{L. } 256869$$

$$\frac{3840}{152}$$

twort 257869 geographische Meilen.

Zur Selbstübung.

che Fläche schließt auf der Erdkugel die Ekliptik mit quator ein, Kreise die sich unter einem Winkel 28′ zusammen neigen?

Ausmittlun der Oberfläche solcher ugelstücke, von einer Ebene begränzt sind.

ne Formel für diesen Fall abzuleiten, ist n strengen Sinne genommen, die Sache des tial- und Integralkalkuls. Indessen kann doch urch gemeine Rechnung geleistet werden. Ich

Kugel verhält, wie die Höhe des Kug
stücks zum Durchmesser der ganzen Ku

Zum Beweise nehme man solche Kreise auf der O
fläche der Erdkugel an, die mit Halbmessern von
bis 2° beschrieben werden; indem man sie für e
Kreise ansehen kann, und der Wahrheit auf diese
sehr nahe kömmt.

Ein Grad hält bekanntlich 15 geographische M
len. Folglich ist die Fläche eines solchen Kreises,
zum Halbmesser einen Grad hat,

$$15^2 \times 3,14159 = 706,86.$$

Nun bestimme man die Höhe eines Kugelstück
das vom Pol allerwärts einen Grad hinweg zäh
diese Höhe ist nichts anders, als der Quersinus (s
nus versus) von 1°. Aber sin. vers. 1° = 1 -
cos. 1° das ist 1 — 0,9998477 = 0,000252
in Halbmessern; folglich in Durchmessern 0,0000761
Wenn sich nun die Oberfläche eines Kugelstücks z
Oberfläche der ganzen Kugel wie die Höhe desse
ben zum Durchmesser verhält, so muß durch folgend
Proportion die nämliche Antwort erzielt werden.

$$1 : 0,00007616 = 9281150 : x$$

$$x = 9281150 \times 0,00007615.$$

L. 9281150 = 6. 9676017
L. 0,00007616 = 0. 8816699 — 5

2. 8492716 = L. 706,77

Beys

m Ueberfluß vergleiche man auch einen Kreis Erdkugel, der mit einem Halbmesser von 2° be- wird, und also noch nicht merklich von ei- en Kreise abweichen kann.

s. $2^\circ = 0{,}9993908$, also sin. vers. $2^\circ =$ 092 und folglich die Höhe des entsprechenden icks 0,0003046. Daher die Proportion:

$$0{,}0003046 = 9281150 : x$$

$$9281150 = 6.\ 9676017$$

$$0{,}0003046 = \frac{0.\ 4837299 - 4}{3.\ 4513316 = \text{L. } 2827}$$

un berechne man auch einen ebnen Kreis auf kugel, dessen Halbmesser 2° oder 30 geo- che Meilen beträgt.

$$\log. 30 = 1.\ 4771218$$

$$\frac{2}{2.\ 9542436}$$

$$\log. \pi = 0.\ 4971499$$

$$3.\ 4413935 = \text{L. } 2827{,}4.$$

an erhält also auch hier wieder beynahe glei- worten.

eutet man demnach das Verhältniß dee Höhe olchen gegebnen Kugelstücks zum ganzen Durch-

$$1 : m = 4r^2\pi : x$$

und $$x = 4mr^2\pi.$$

§. 72. Obige Formel läßt sich noch all meiner ausdrücken.

Da die Höhe eines gegebnen Kugelstücks nic anders als der Quersinus jenes Bogens ist, der v Pol bis zur ebnen Begränzung reicht, so kann me wenn a den bemeldten Bogen bezeichnet, diese H oder m durch sin. vers. $\frac{a}{2}$ $= 1 - \cos. \frac{a}{2}$ ausd cken. Daher

$$1 : 1 - \cos. \frac{a}{2} = 4r^2\pi : x$$

und $x = 2r^2\pi\ (1 - \cos. a)$.

§. 33. Einige Folgesätze.

1. Für $a = 0$ ist auch $x = 0$; weil co $0 = 1$ und der Faktor $1 - 1$ zu Null, folgli auch das ganze Produkt zu Null wird.

2. Für $a^\circ = 90^\circ$ wird $x = 2r^2\pi$, da heißt, man erhält in diesem Falle die halbe Kugel fläche; denn cos. $90^\circ = 0$, also $1 - 0 = 1$ welcher Faktor $2r^2\pi$ multiplizirt, das Nämliche giebt

2. Für $a = 60^\circ$ kömmt $x = r^2\pi$, oder de 4te Theil der ganzen Kugelfläche; weil cos. $60^\circ =$

sin.

Anwendung.

Was beträgt der Flächeninhalt einer kalten Zone auf unsrer Erdkugel?

Auflösung.

Vom Pol bis zum Polarkreis sind bekanntlich 23° 28′. Also 1 — cos. 23° 28′ = 1 — 0,8279 = 0,083172.

Es giebt daher die Substitution:

$$x = 2 \cdot 859{,}5^2 \cdot 3{,}14159 \cdot 0{,}083272$$

Logarithmische Berechnung.

L. 2	=	0. 3010309
L. 859,5	=	2. 9342459
	=	2. 9342459
L. π	=	0. 4971499
L. 0,083172	=	0. 9199771 — 2
		5. 5866488 = L. 386055.

Es hält demnach eine kalte Zone auf unsrer Erde 386055 geographische Quadratmeilen, wenn man die Schiefe der Ekliptik nicht mehr als 23° 28′ annimmt.

Wie groß ist eine gemäßigte Zone?

Auf-

Man berechne eine kalte und gemäßigte Zon
Zusammenhange, und ziehe dann die kalte Zone
von ab, so bleibt die gemäßigte über.

Nun sind vom Pole bis zum Wendekreise 66°
Also 1 — cos. 66° 32'

= 1 — 0,3982155 = 0,6017845.

Man erhält also wieder

$x = 2 \cdot 859{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}6017845.$

Logarithmische Berechnung.

L. 2	=	0. 3010300
L. 859,5	=	2. 9342459
		2. 9342459
L. π	=	0. 4971499
L. 0,6017845	=	0. 7794410 — 1
		6. 4461127 = L. 279327

1020

107

Davon die kalte Zone abgezogen, bleibt:

2793270

386055

2407215 Quadratmeilen für e
ne gemäßigte Zone.

Da nun die halbe Erdoberfläche 464164 Qua
dratmeilen enthält, so bleibt für die halbe heisse Zon

1848375

2

3696750 Quadratmeilen für

eiße Zone.

Probe.

te Zone. 386055

386055

näßigte 2407215

2467215

iſſe 3696750

9283290 Quadratmeilen.

Zur Selbstübung.

Wenn die Schiefe der Ekliptik in etlichen tausend Jahren
uf 20° vermindert seyn wird; welchen Unterschied werden
die 3 Zonen in ihrem Flächeninhalt gegen einander be-
ten?

3. Flächenstücke auf der Erdkugel zu be-
rechnen, die von Bögen zweyer Mit-
tagskreise und eines Parallelkrei-
ses begränzt werden.

Man braucht hier nur zwey Stücke zu kennen,
lich die Länge eines Meridianbogens, und den
kel am Pol, den die beyden Meridiane mit ein-
er bilden. Ersterer bestimmt die Höhe des entspre-

chen-

portionaltheil dieser Oberfläche für das gegebene
eck aus.

Nennt man demnach allgemein die Länge
solchen Meridianbogens = a, so ist die Höhe
entsprechenden Kugelstücks in einem Dezimalbruche
Durchmessers $\frac{\text{sin. ver. a}}{2} = \frac{(1 - \text{cos. a.})}{2}$ und es
die Proportion:

$$1 : 1 - \cos. a. = 4 r^2 \pi : x$$
$$x = 2 r^2 \pi (1 - \cos. a)$$

Da sich nun der Flächenbetreff y zwischen zw
Meridianbögen nach dem Winkel am Pole richtet, d
wir allgemein φ nennen wollen, so hat die zwe
Proportion statt

$$360^\circ : \varphi^\circ = 2 r^2 \pi (1 - \cos. a) : y$$
$$y = \frac{r^2 \varphi^\circ \pi (1 - \cos. a)}{180^\circ}.$$

Anwendung.

Zwei Meridianbögen machen am Nordpol eine
Winkel von 10° und sind von einem Parallelkrei
abgeschnitten, der 40° vom Aequator entfernt ist
wie viel Quadratmeilen mögen wohl von diesen drei
Bögen eingeschlossen seyn?

Auf-

tfernt ist, so haben die beiden Meridianbögen
Pol an gerechnet $90^\bullet - 40^\circ = 50^\circ$ Länge.
die Substitution.

$$y = \frac{859{,}5^2 \cdot 10\ 3{,}14\ (1 - \cos.50^\circ)}{180} =$$

$$\frac{859{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot (1 - 0{,}6427876}{18} =$$

$$= \frac{859{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3572124}{18}.$$

Logarithmische Behandlung.

L. 859,5 = 2. 9342459
2. 9342459
L. π = 0. 4971499
L. 0,3572124 = 0. 5529265 — 1
5. 9185682
L. 18 = 1. 2552725
4. 6632957 = L. 46057.

Quadratmeilen.

Anwendung.

1. Was beträgt der Flächeninhalt einer kalten Zone auf unsrer Erdkugel?

Um diese Aufgabe auf eine kürzere Art abzufertigen, muß man zuvor die Höhe jenes Erdkugelstücks bestimmen, welches von einem Polarkreise begränzt wird, um zu erfahren, welcher Bruch vom Durchmesser hier in der

For-

Da vom Pol bis zum Polarkreise 13° 28′ so suche man den Quersinus (sinus versus) von 28′, und drücke ihn in einem Dezimalbruch des D messers aus.

Nun ist sin. ver. 23° 28′ = 1 — cos. 28′. Aber cos. 23° 28′ — 0,9168279.

1 — 0,9168279 = 0,083172 in Halbmes folglich im Durchmessern m = 0,041586.

Da aber in $U = 4r^2 m\pi$ das Produkt 4 hier nichts anders als die volle Umfläch der Kugel bedeutet, so ist die ganze Rechnung damit gethan, daß man 9281150 mit dem Dezimalbr 0,041586 multiplizirt.

Logarithmische Behandlung.

L. 9281150 = 6. 9676017
L. 0,041586 = 0. 6189471 — 2

5. 5866488 = L. 3860

Quadratmeilen.

Es hält demnach wie oben eine kalte Zone 386055 g graphische Quadratmeilen, wenn man die Schie der Ekliptik nicht mehr als 23° 28′ annimmt.

2. Man beantwrte auf die nämliche A die Frage: Wie groß ist eine gemäßigte Zon

Man

$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ 23^\circ\ 28' \\ \hline 66^\circ\ 32' \end{array}$$ den Bogen vom Pol

um Wendezirkel.

Kosinus $66^\circ\ 32' = 0{,}3982155$

sin. vers. $66^\circ\ 32' = 0{,}6017845$

folglich $m = 0{,}3308922.$

Im Grunde genommen, darf also hier wieder nichts
n, als der Inhalt der ganzen Erdoberfläche mit
n Dezimalbruche multiplizirt werden.

Daher 6. 9676017

$0{,}33008922 = \underline{0.\ 4784110 - 1}$

6. 4460127 = L. 2792630

atmeilen. 87

40

Wie kann aber die eigentliche Länge
s Kreises berechnet werden, der auf
der Erdkugel mit dem Aequator
parallel läuft.

Man darf nur die Länge des Aequators, welche
Meilen beträgt, mit dem Kosinus und Breite
arallelkreises multipliziren, wie sich dieß mit-
iner leichten Zeichnung sehr begreiflich erweisen

laßt

ge er dem Aequator kömmt. Und im Gegentheil der Parallelkreis desto kleiner seyn, je größer Breite ist, so zwar, daß er für die Breite von wie der Kosinus dieses Bogens selbst = o wird.

p = 5400 cos. b Meilen wo p einen rallelkreis und b dessen Breite vorstellt.

Anwendung.

Welche Größe hat ein Wendekreis, dessen te bekanntlich 23° 28′ beträgt.

Auflösung.

Log. 5400 = 3. 7323938
Log. cos. 23° 28′ = 0. 9625076 — 1

3. 6949014 =

= Log. 4953,4 geographische Meilen.

Zur Selbstübung.

Weiche Größe hat ein Polarkreis, dessen Breite 66 hält?

§ 75. Es lassen sich auf der Kugel Obe fläche auch sogar Vierecke berechnen.

Jene Kreise, die auf der Erdkugel mit de Aequator parallel gezogen sind, durchschneiden die M ridiane unter rechten Winkeln, und so entstehen ei

Art

nd vom untern Parallelkreise begränzt wird, nach
)en aufgestellten Formel bestimmen, dann die
he Behandlung auch mit eben demselben Raum,
n obern Parallelkreise vornehmen, und beide Re-
: von einander abziehen, so hat man die ver-
viereckichte Flächenfigur ausgemittelt.

heißt z. B. die Breite des untern Parallelkreises
, die Breite des obern Parallelkreises = B,
er dazwischen begriffene Bogen des Aequators,
der Winkel am Pol = φ, so ist, weil vom
bis zu den bemeldten Parallelkreisen 90 — b,
)0 — B sind, und weil cos. (90 — b) = sin. b

$$= \frac{r^2 \varphi \pi}{180} (1 - \text{sin. b}) - \frac{r^2 \varphi \pi}{180} (1 - \text{sin. B})$$

$$\frac{r^2 \varphi \pi}{180} (1 - \text{sin. b} - 1 + \text{sin. B}) = \frac{r^2 \varphi \pi}{180}$$

B — sin. b).

Anwendung.

Da auf dem Erdglobus der erste Parallelkreis
34′ vom Aequator entfernt ist, so soll ein sol-
viereckigtes Flächenstück berechnet werden, das
hen zwey Meridianen von 10° Entfernung und
hen Aequator und besagten Parallelkreise liegt.

Auf-

$\varphi = 10°$. Daher

$$x = \frac{859{,}5^2 \cdot 10° \cdot 3{,}14 \cdot \sin. 8° 34}{180}$$

$$\frac{859{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot \sin. 8° 34'}{18}$$

Und logarithmisch:

Log. 859,5	=	2. 9342459
		2. 9342459
Log. π	=	0. 4971499
Log. sin. 8° 34′	=	0. 1730699 — 1
		5. 5387116
Log. 18	=	1. 2552725
		4. 2834391 = Log. 192

geographische Quadratmeilen.

Wollte man dieses Flächenstück als ein ebnes Tr
pez betrachten, so müßte die größere Grundlini
nämlich der Bogen des Aequators = 10 × 15 = 15
Meilen gesetzt werden. Die kleine Grundlinie, od
der Bogen des Parallelkreises ist nach einem ande
Lehrsatze der Sphärik 1 — cos. 8° 34′ = 148,3
Meilen. Das Mittel von beyden Grundlinien wä

demnach 149,16. Dieß mit der Parallelweite $8\frac{1}{3}$
× 15 = $128\frac{1}{2}$ multiplizirt giebt 19157, also we

gen

Zur Selbstübung.

sika liegt auf der Karte zwischen zwey Meridianen, n Grad von einander entfernt sind, wäre diese Insel Viereck zusammen geschoben, so fienge sie bey der 41° 30′ an, und endtete sich bey 42° 30′. Wie groß ol der eigentliche Flächeninhalt von Corsika seyn?

Zum

Zum Beschluß einige Probleme der Sphärik, sich aus den bisher vorgetragenen Lehrsätze und Formeln auflösen lassen.

Erstes Problem.

Durch welchen Breitegrad ist die Grä des ersten Klimas auf dem Erdglobus zogen? Durch welchen Breitegrad die Gr ze des 2ten, 3ten Klimas u. s. w.

Vorarbeitung.

Die Gränze des ersten Klimas ist da, wo längste Tag $12\frac{1}{2}$, folglich die kürzeste Nacht Stund dauert. Es muß also die Dauer der Nacht in nem Bogen verwandelt werden, gemäß der Regelde

Oder x 15

$11\frac{1}{2}$

15

15

7 30

172 30

86° 15.

Da nun für den längsten Tag die Abweichung der Sonne ein Größtes ist, und 23° 28′ beträgt, so gilt in der Formel

$$\text{tang. } p = \frac{\cos. \frac{1}{2} n}{\text{tang. } d}$$ die Substitution

$$\text{tang. } x = \frac{\cos. 86° 15'}{\text{tang. } 23° 28'}.$$

Die Gränze des zweyten Klimas ist da, wo kürzeste Nacht 11 Stunden währt. Es nehmen die kürzesten Nächte von Klima zu Klima immer $\frac{1}{2}$ Stund ab. Die übrigen Rechnungen sind wie obige.

Zweytes Problem.

Wann geht in München den 15. Jänner Sonne auf?

für den 15. Jänner gesucht werden. Dazu dient Formel

$$\text{sin. deo. } \odot = \text{sin. long. } \odot \text{. sin. obl}$$

Aber wie groß ist die Sonnenlänge den 15. Jänne Man bestimme die Anzahl der Tage vom 15ten Jä ner bis 19. März. Dieß sind 16 + 28 + 19 = Tage.

Nun setze man nach der Regeldetri:

Tag.	Minuten.	Tag.
1	62	63
		62
		126
		378
		3906

3	1
3906	65° 6′.
660	

Ist die Deklinazion gefunden, dann wende ma die Formel

$$\text{tang. p} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,\text{n}}{\text{tang. d.}}$$

so um daß cos. $\frac{1}{2}$ n allein zu stehen kömmt, und substituir gehörig, wobey zu bemerken kömmt, daß München Polhöhe 48° 8′ beträgt.

Drit

Welche Polhöhe kann ein Ort auf der
dkugel haben, dessen längster Tag 19
unden 40 Minuten beträgt?

Vorbereitung.

Da die geographische Breite eines Orts und die
lhöhe desselben gleichbedeutende Größen sind, so
dieses Problem den nämlichen Sinn, wie das er-
und es ist auch hier die Formel anwendbar

$$\text{tang. p.} = \frac{\cos. \frac{1}{2} n}{\text{tang. } 23^\circ\ 28'}.$$

Viertes Problem.

Ein Landedelmann will auf seinem
elsitze, der 47° 58′ Polhöhe hat, durch
lfe des Sonnenuntergangs eine Mittags-
ie ziehen. Er wählt dazu den 28. August.
elcher Winkel muß von der Untergangsweite
ses Tages weggemessen werden, um den
hren Westpunkt im Horizont zu erhal-
n?

Vorarbeitung.

Es sind vom 28. August bis zur nächsten Nacht-
iche $3 + 23 = 16$ Tage. Diese mit 57′ multipli-
und zu Grad gemacht, geben 24° 42′.

$$\sin. w = \frac{\sin. s. \sin. l}{\cos. p.}$$ substituirt

werden $$\sin. x = \frac{\sin. 23^\circ\ 28'. \sin. 24^\circ\ 42'}{\cos. 47^\circ\ 58'}$$

Man erhält demnach den Bogen des Horizo
welchen man vom Sonnenuntergange südwärts wegz
sen muß, um den wahren Westpunkt zu erhal
Ist dieser einmal bestimmt, dann ist es leicht,
Mittagslinie zu ziehen; denn es dürfen nur auf d
Endpunkt jener Linie, die den Edelsitz mit den w
ren Westpunkt verbindet, Perpendikulärlinien
gen Süd n und Norden aufgerichtet werden.

Fünftes Problem.

Wie groß ist die Entfernung der zwe
berühmten Handelsstädte Hamburg un
Venedig von einander, sowohl in eine
größten Kreis-Bogen ausgedrückt, al
in geographischen Meilen aufgelöset? E
beträgt aber die geographische Länge un
Breite

von Hamburg	27°	30′	Lge.	53°	34′ Br.
von Venedig	29°	44′	—	45°	27′ —

Vorbereitung.

Am beßten wird man hier fahren, wenn man
sich jener 4 kurzen Formeln bedient, die ich Seite 56

auf-

l = 27 30
B = 53 34
und b = 45 27 ist.

Sechstes Problem.

Zu jeder Stunde des Tages die Höhe Sonne über den Horizont anzugeben?

Vorarbeitung.

Stellt man den Globus so, daß der Ort der nne für einen gegebenen Tag und Gegend auch zu- ch die Stunde versinnlicht, in der man die Höhe Sonne über den Horizont erfahren will, und zieht n aus dem Nordpol durch den Ort der Sonne in anken einen Mittagskreis, so bildet ein Bogen eigentlichen Mittagskreises damit einen Winkel, man den Stundenwinkel nennen kann, weil er n Bogen des Aequators zum Maaße hat, der schen der gegebenen Stunde und dem Mittage durch Meridian geschoben werden muß. Zieht man nun vom Zenith aus durch den Ort der Sonne einen adranten auf den Horizont, so schließt sich ein schief- klichtes Dreyeck, das dnrch einen Perpendikel aus Zenith auf die Gegenseite hingefällt in zwey recht- klichte Dreyecke zerschnitten wird. Heißt man dem die Polhöhe = π, den Stundenwinkel in Gra- und Minuten ausgedrückt = St., die Deklina- der Sonne = d, so ist es ein leichtes, sich ch Hilfe der Tabelle folgende Gleichungen abzuleiten:

1.

2. sin. y = sin. St. cos. π.

3. 90° — d — x = z für Frühling u. Son
und 90° + d — x = z für Herbst und Wint
4. sin. u = cos. y. cos. z, wo u endlich
verlangte Sonnenhöhe vorstellt.

Zu merken ist noch, daß wenn die Stunden zwi
der gegebnen Zeit und dem Mittag in Grade ver
delt werden, man den Raum der Sonne in ei
Tage nicht zu 360° sondern wegen ihrer spiralfö
gen Bewegung zu 360° 59′ 8″ rechnen müsse. D
giebt z. B. für 9 Uhr früh oder für 3 Uhr Abends 4
7′ 24″.

Für München finde ich auf diese Weise den
May um 3 Uhr Abends die Sonnenhöhe 42° 34′

Siebendes Problem.

Ein Künstler ist im Begriffe, ein
Globus von 1½ Schuh Durchmesser zu ve
fertigen. Er macht denselben aus Pappe
deckel, und will ihn mit 16 gleich großen
weckenförmigen Papierstreifen überziehen
Diese Papierstreifen, die natürlich 28,2
Zoll lang seyn müssen, werden der Breit
nach von 5° zu 5° parallel abgetheilt; nu
fragt es sich, welche Breiten diese Stre
fen

. f. f. bekommen sollen

Vorbereitung.

1. Die grösste Breite eines solchen Streifes ist ne Zweifel in der Mitte, und läßt sich durch die rmel finden $\frac{dp}{16} = \frac{3.12.3,14159}{2.16} = \frac{3.3.3,14159}{2.4}$

$= \frac{28,27431}{8.} = 3,534...$ Zolle.

2. Die Breite 5° oben und unterhalb begehrt die rmel

$x = 3.534. \cos. 5°$

3. Die Breite 10° oben und unterhalb

$x = 3,534. \cos. 10°$ u. s. w.

Achtes Problem.

Zwey Kolurbögen, die beyde vom Nord- l ausgehen, und bis dahin reichen, wo nerseits die Ekliptik den Wendekreis des ebses berührt, andererseits den Aequa- r schneidet, schließen mit dem dazwi- en liegenden Stück der Ekliptik ein gro- s sphärisches Dreyeck auf der Erdkugel n. Es soll der Flächeninhalt dieses Drey- s berechnet werden.

Vor-

offen. Der eine geht gerade zu; der andere
eine kleine Ausbeugung; führt aber eben so gesch
und sicher zum Ziele, als der erste. Dieser
Weg besteht nämlich darin, daß man vor allen
beyden Winkel zu bestimmen sucht, welche die
ren mit der Ekliptik machen, während der
Winkel am Pol 90°. beträgt.

Weil einer der beyden Kolurbögen 90° und
andere 90° — 23° 28′ = 66° 32′ hält,
weil sich nach §. 43 die Sinusse der Seiten wie
Sinusse der Gegenwinkel verhalten, und ein so
Gegenwinkel ebenfalls 90° — 23° 28′ = 66°
mißt, so ist

sin. 66° 32′. sin. 90 = sin. 66° 32′ sin

woraus hervorgeht, daß der andere Winkel auch
rechter seyn müsse. Man kann daher in der For

$$\Delta = \frac{r^2 \pi (A + B + C - 180°)}{180°}$$ so sub

tuire $$x = \frac{159{,}5^2 \cdot 3{,}14 (90° + 90° + 66° 32'}{180°}$$

180°).

Auf dem zweyten Wege wird jenes kleine St
der Erdoberfläche berechnet, welches Aequator, Ekli
tik und die größte Abweichung der Sonne einschliesse
und das Resultat desselben vom 3ten Theil der ganz
Erdoberfläche abgezogen.

Wenn man die Entfernungen der drey rittischen Hauptstädte, London, Edin= urg und Dublin von einander durch Bö= en größter Kreise unter sich verbindet, o entsteht ein sphärisches Dreyeck. Wel= he Seiten und Winkel enthält wohl dieses Dreyeck?

Vorarbeitung.

Um dieses zu leisten, muß man vor allem die eographischen Längen und Breiten dieser 3 Städte wis= en. Es hält aber

	Länge.		Breite.	
London	17°	34′	15°	31′
Edinburg	14	29	55	56
Dublin	10	49	52	11

Ende.

Inhalt.

Seite

Erster Abschnitt.

Vorbegriffe . . 1—10

Zweiter Abschnitt.

Von rechtwinklichten sphärischen Dreyecken 11—39

Dritter Abschnitt.

Von schiefwinklichten sphärischen Dreyecken 40—68

Vierter Abschnitt.

Berechnung verschiedener Flächenfiguren und anderer Theile auf der Kugel . 69—95

Am Beschluß einige Probleme der Sphärik, die sich aus den bisher vorgetragenen Lehrsätzen und Formeln auflösen lassen 96—105.

Berichtigung.

Seite 70. Zeile 11. statt 6. 9676017 = Log. 928
lies: 6. 9677017 = Log. 9283290 Quadratmeilen.

Tab. I.

Fig. 1.

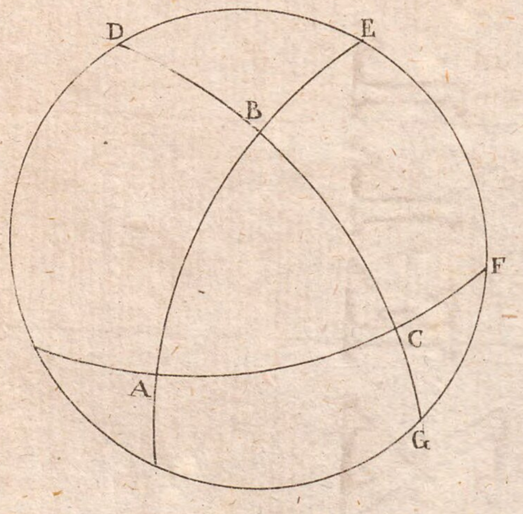


Fig. 2.

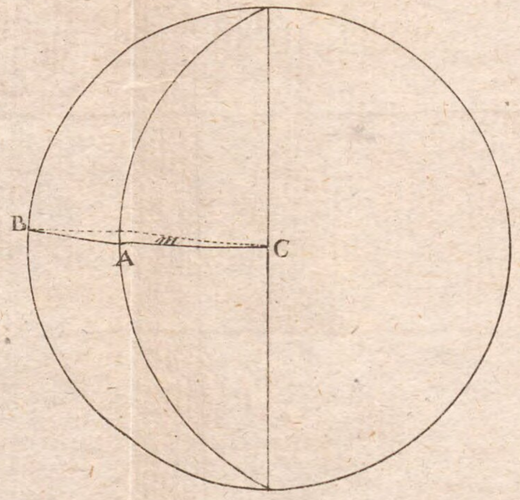


Fig. 3.

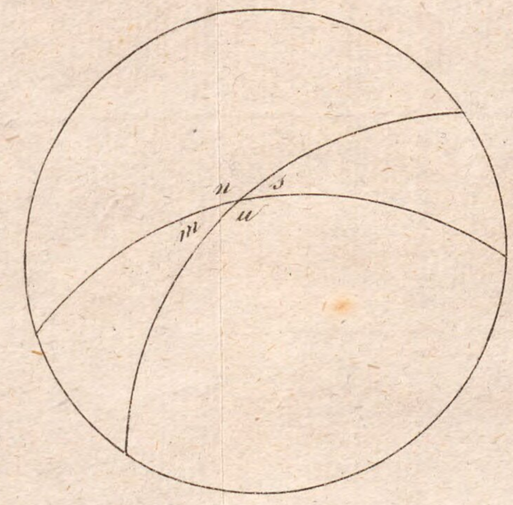


Fig. 4.

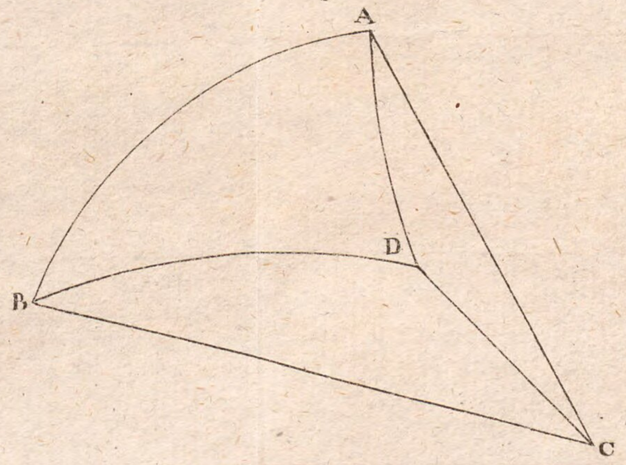


Fig. 5.

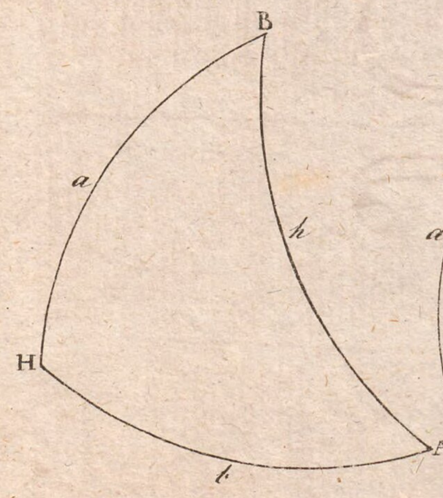


Fig. 6.

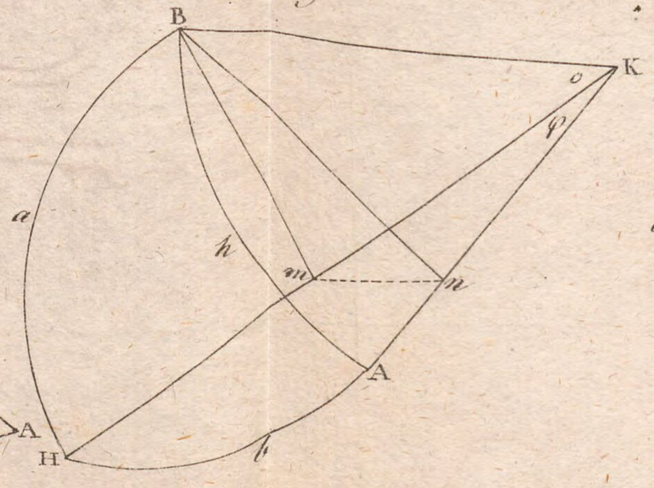


Fig. 7.

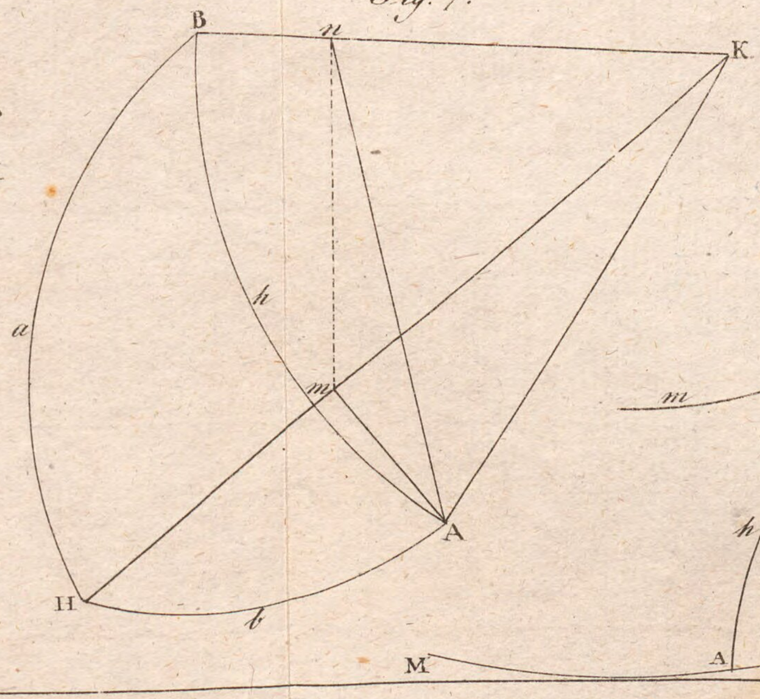
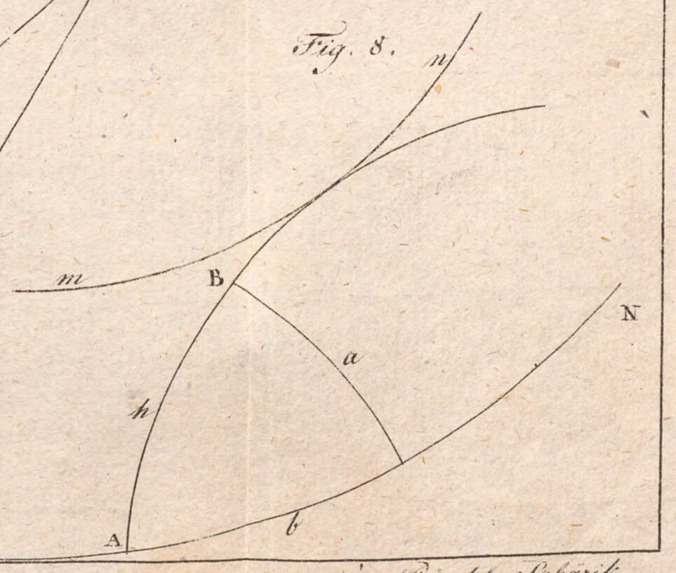


Fig. 8.



Zu Brandels Sphärik.

Fig. 9.

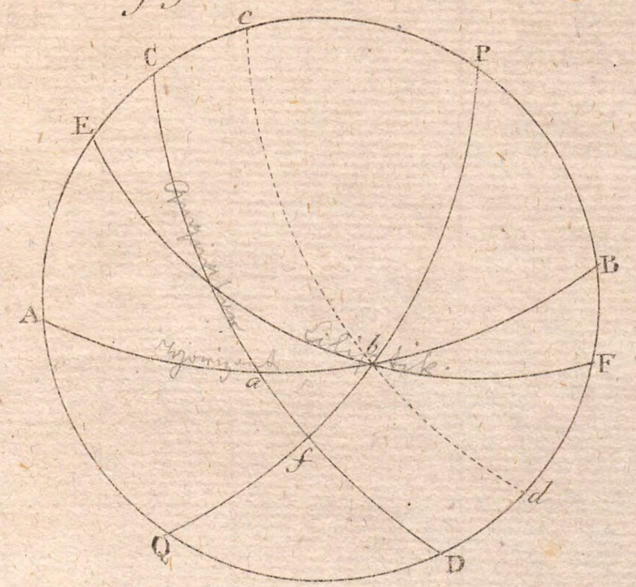


Fig. 10.

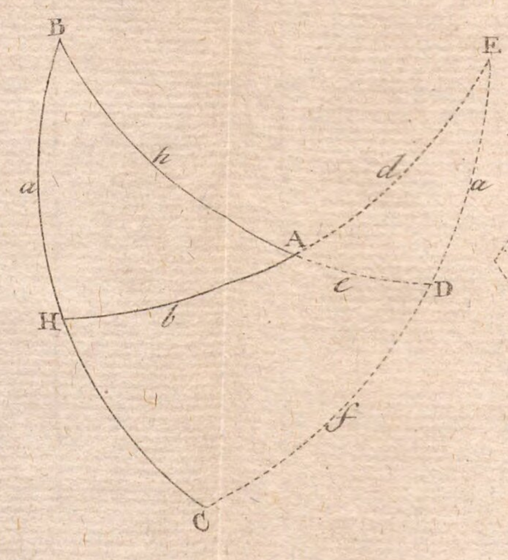


Fig. 11.

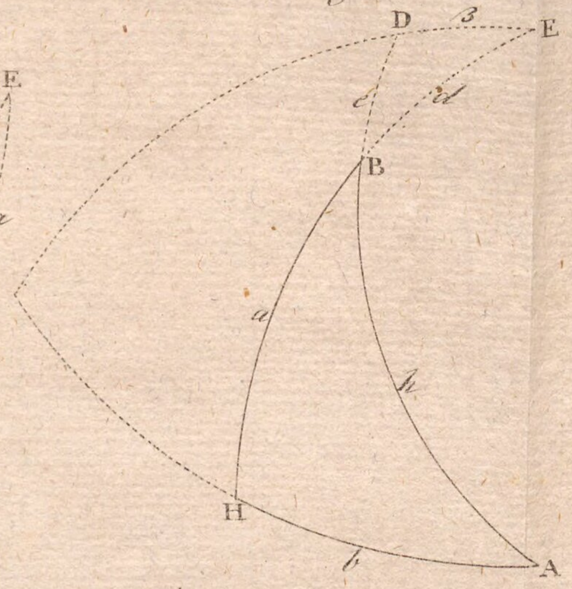


Fig. 12.

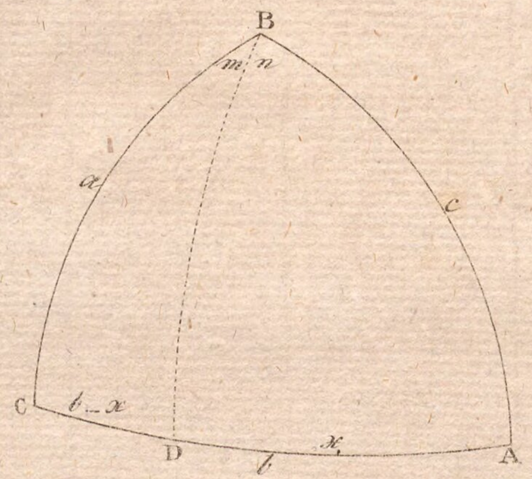


Fig. 13.

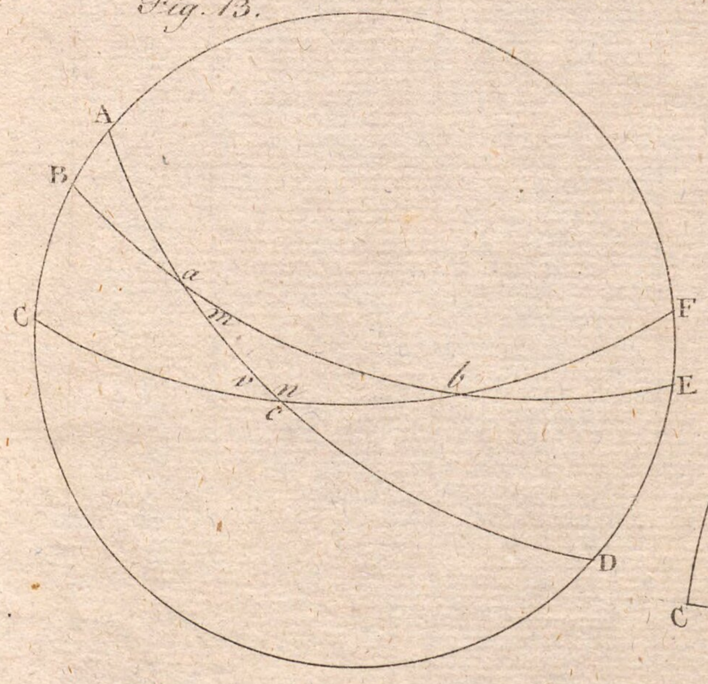


Fig. 14.

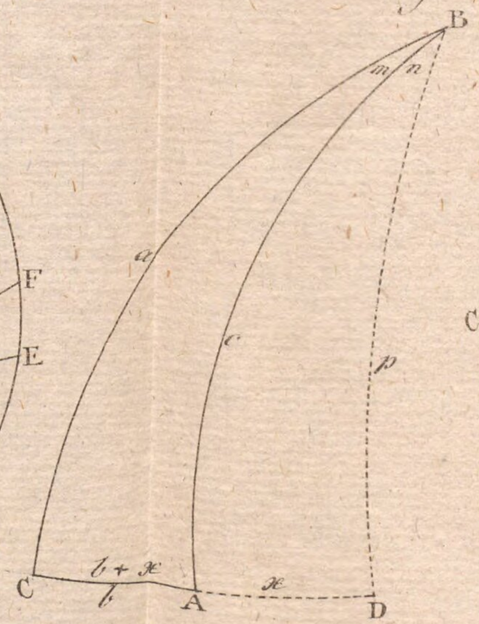


Fig. 15.

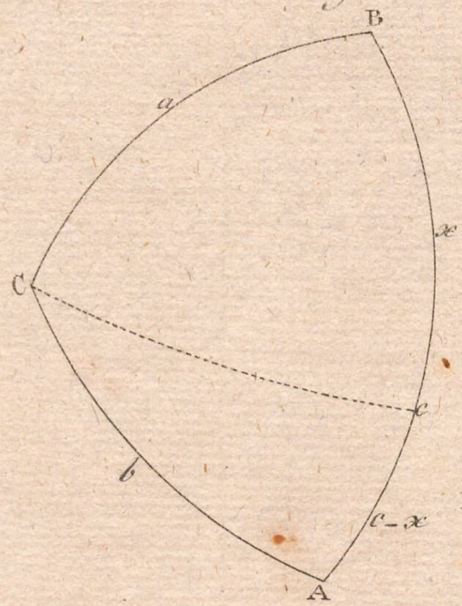
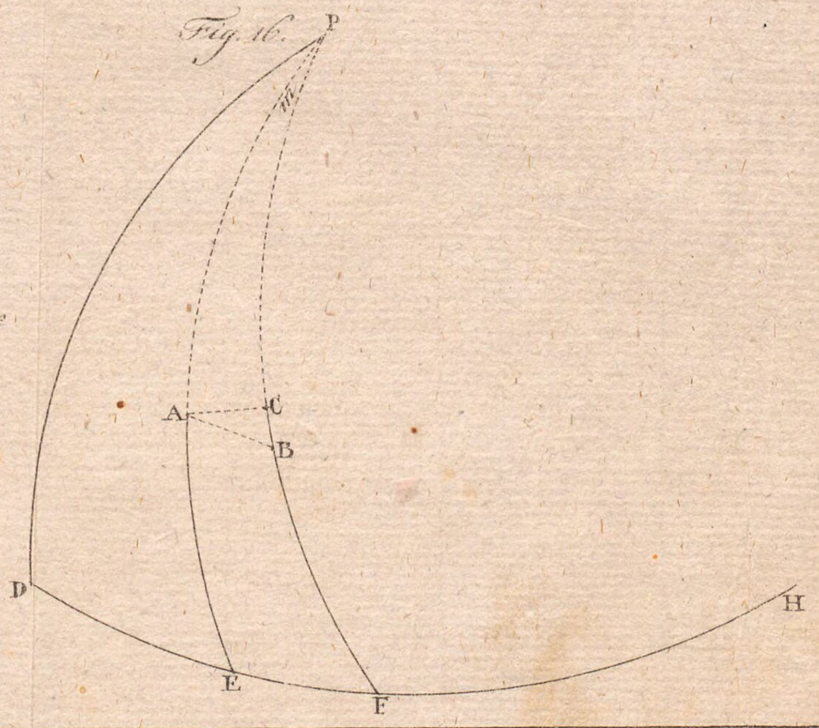


Fig. 16.



Zu Brändels Sphärik.

Fig. 17.

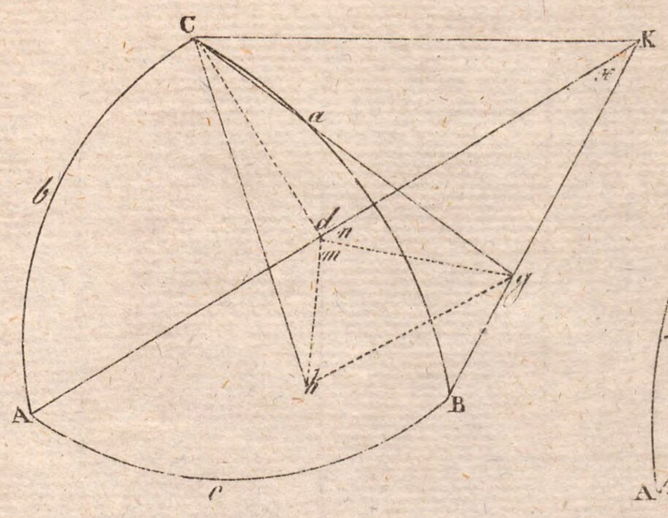


Fig. 18.

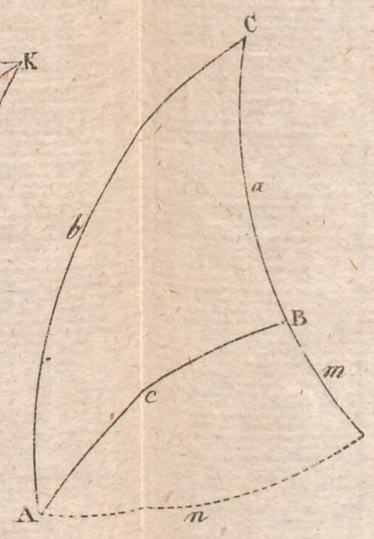


Fig. 19.

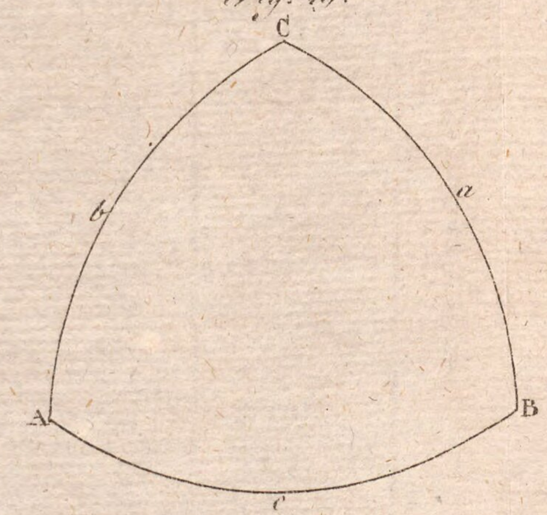


Fig. 20.

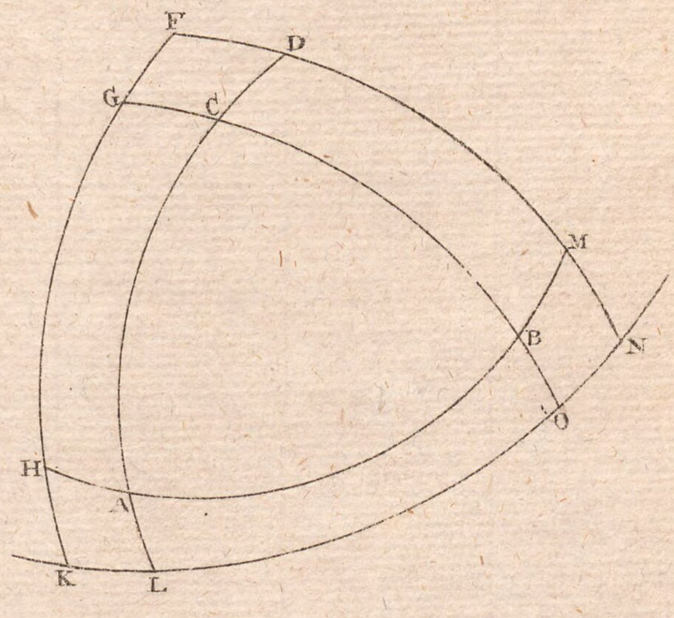


Fig. 21.

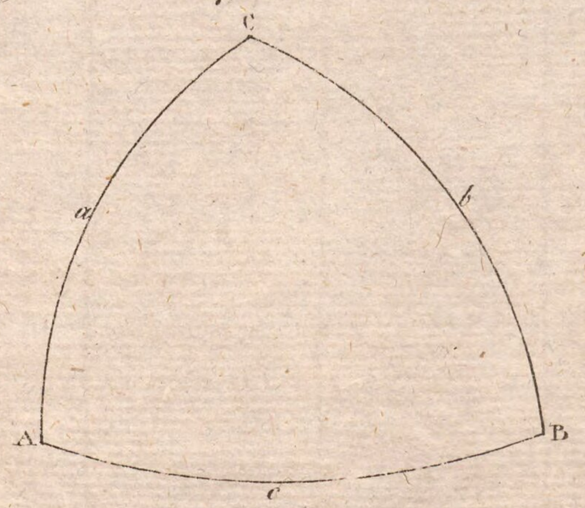


Fig. 22.

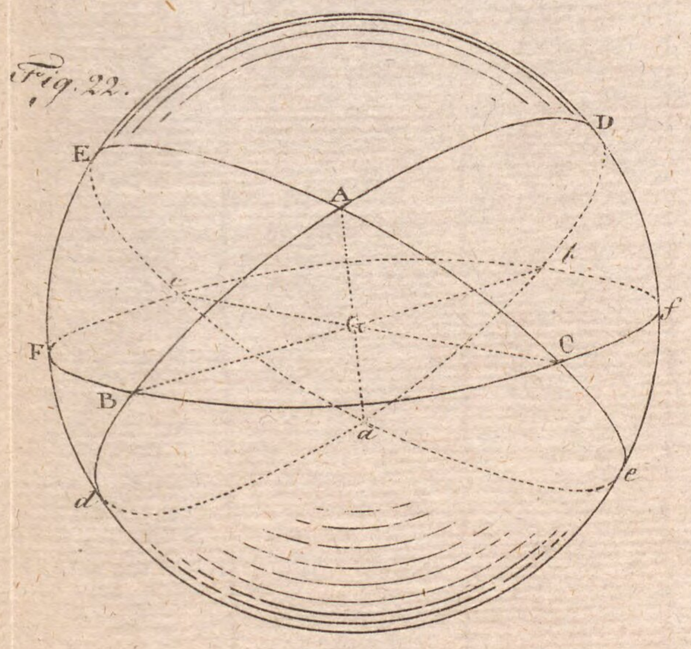
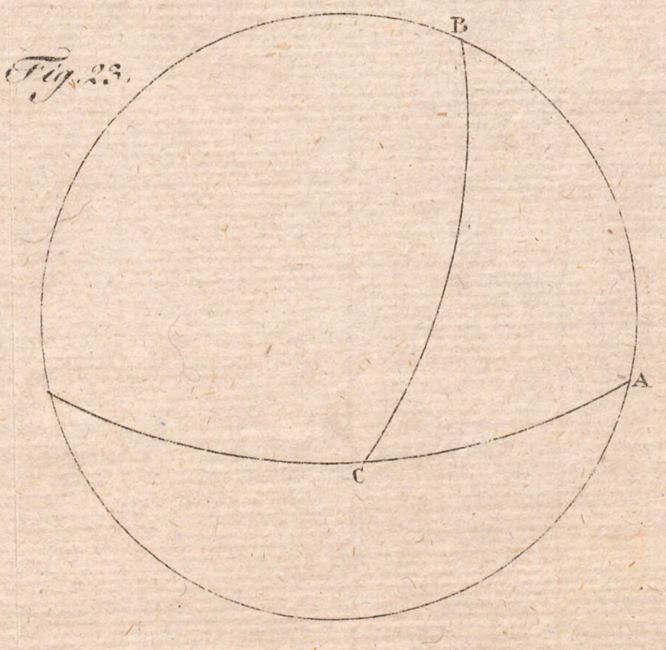


Fig. 23.



Zu Brandels Sphärik.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Die Sphärik analytisch vorgetragen, und mit Beispielen aus der Erdglobuslehre beleuchtet, Oder Sphärische Trigonometrie in sehr faßlichem Vortrag analytisch dargestellt, und auf die Anfangsgründe der Astronomie angewendet

München 1815

Math.p. 444
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082614-6